Использование GeoGebra 3D для визуализации и исследования геометрических свойств в курсе стереометрии

Автор: Ломакин Ярослав Назарович

Должность: учитель математики

Образовательная организация: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Школа № 10 имени И. Т. Волынкина г. Феодосии»

Населённый пункт: город Феодосия

Аннотация. В статье рассматриваются возможности использования интерактивной математической среды GeoGebra 3D при изучении стереометрии. Особое внимание уделяется визуализации взаимного расположения прямых и плоскостей, исследованию пространственных геометрических отношений и построению сечений многогранников. Предлагаются учебные задания, направленные на развитие пространственного мышления, формирование исследовательских умений и осознанное применение геометрических теорем. Подчёркивается необходимость сочетания динамической модели, традиционного чертежа и математического доказательства.

Ключевые слова: стереометрия, GeoGebra 3D, пространственное мышление, динамическая геометрия, цифровые образовательные технологии, визуализация, сечения многогранников.

Введение

Изучение стереометрии в 10 классе представляет собой важный этап формирования геометрического мышления школьников. В отличие от планиметрии, стереометрия требует умения представлять пространственные объекты, определять их взаимное расположение, устанавливать зависимости между элементами фигур и обосновывать полученные выводы.

Существенная трудность состоит в необходимости воспринимать трёхмерные объекты по их плоским изображениям. Традиционный чертёж на доске или в учебнике не всегда позволяет точно представить расположение прямых, плоскостей и невидимых рёбер. Например, скрещивающиеся прямые могут казаться пересекающимися из-за выбранной проекции, а построение сечения многогранника требует понимания взаимного расположения его граней.

Одним из способов дополнить традиционные средства обучения является применение интерактивной среды GeoGebra 3D. Динамические модели позволяют вращать фигуру, изменять положение отдельных элементов и сравнивать геометрические отношения при разных ракурсах. Методическая задача учителя при этом состоит не в подмене доказательства визуализацией, а в организации перехода от наблюдения к обоснованному математическому выводу.

1. Цель и задачи предлагаемой методики

Цель — создать условия для развития пространственного мышления обучающихся 10 класса посредством визуализации и исследования свойств пространственных фигур в среде GeoGebra 3D.

Для достижения цели предусматриваются следующие задачи:

- формировать умение распознавать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве;
- развивать навыки построения и анализа пространственных моделей;
- формировать умение выдвигать гипотезы, проверять их и аргументировать геометрические выводы;

- совершенствовать способность применять аксиомы и теоремы стереометрии при решении задач;
- развивать самостоятельность при построении сечений многогранников.

Предлагаемая последовательность действий обучающихся: наблюдение → гипотеза → проверка на модели → доказательство → самостоятельное применение.

2. Методические возможности GeoGebra 3D

Инструменты GeoGebra 3D позволяют создавать точки, прямые, плоскости, многоугольники и многогранники; менять ракурс наблюдения и положение объектов; выделять цветом нужные элементы; изменять прозрачность поверхностей; находить линии пересечения геометрических объектов. Благодаря этому динамическая модель может использоваться не только для демонстрации готового результата, но и как средство постановки учебной проблемы.

Однако само наблюдение на экране не является математическим доказательством. Поэтому после работы с моделью необходимо организовать обсуждение условий теоремы, поиск обоснования и решение аналогичной задачи без цифровой подсказки.

3. Практические примеры работы с GeoGebra 3D

3.1. Взаимное расположение прямых в пространстве

Предлагается построить куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и последовательно выделить три пары прямых: AB и BC — пересекающиеся; AB и DC — параллельные; AB и CC_1 — скрещивающиеся. Обучающиеся определяют взаимное расположение каждой пары по изображению, затем проверяют свои предположения при вращении модели.

Обсуждение организуется с помощью вопросов: почему отсутствие общей точки не означает параллельности; какое дополнительное условие необходимо для параллельности; почему AB и CC_1 являются скрещивающимися; изменяет ли вращение модели взаимное расположение прямых. Работа направлена на формирование различия между самой пространственной фигурой и её плоским изображением.

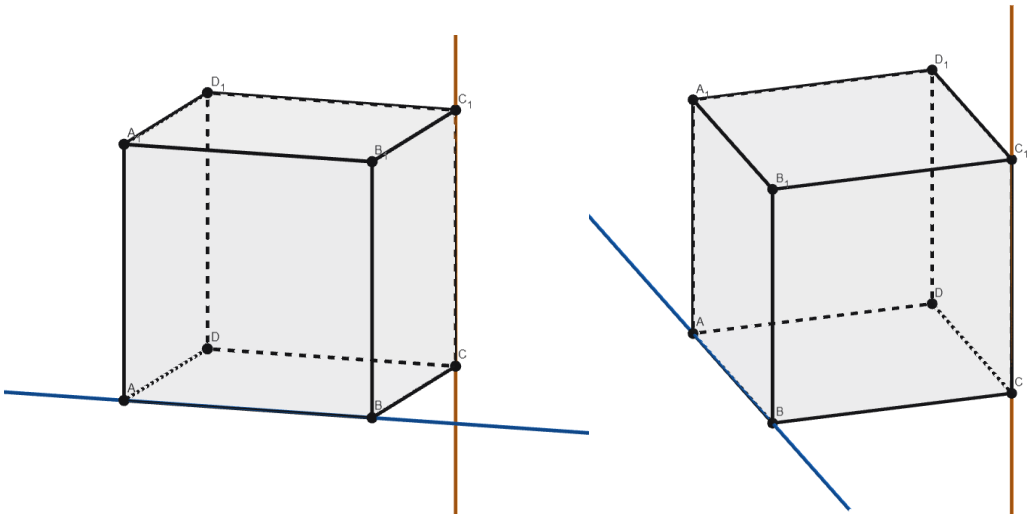

Рисунок 1. Взаимное расположение скрещивающихся прямых AB (синяя прямая) и CC_1 (оранжевая прямая)

Во время урока геометрии в 10 классе по теме «Скрещивающиеся прямые» с обучающимися мы разобрали пример, где необходимо определить взаимное расположение прямых на примере куба. И одним из очевидных затруднений оказалось определить расположение прямых AB и CC_1 по двумерной проекции. Большинство обучающихся полагало, что они пересекающиеся, так как визуально, так и выглядит. Но если на обыкновенной доске придется перестраивать этот

же куб с другого ракурса, что отнимет достаточно времени для более сложных примеров, для того, чтобы показать, что прямые AB и CC_1 не лежат в одной плоскости, то в GeoGebra 3D это можно проще реализовать, путем вращения фигуры (Рисунок 1). Таким образом, мы показываем обучающимся, что прямые действительно не лежат в одной плоскости, а, значит, являются скрещивающимися.

3.2. Параллельность прямой и плоскости

В модели куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выделяются прямая AB и плоскость грани DCC_1. Обучающиеся замечают, что прямая AB не лежит в указанной плоскости, но параллельна принадлежащей ей прямой DC. Следовательно, по признаку параллельности прямой и плоскости $AB \parallel (DCC_1)$.

Затем учитель предлагает рассмотреть плоскость ABC, содержащую AB. Обучающиеся объясняют, почему теперь нельзя назвать прямую параллельной этой плоскости. Такой контраст помогает обратить внимание на условия признака и предупреждает отождествление принадлежности прямой плоскости с их параллельностью.

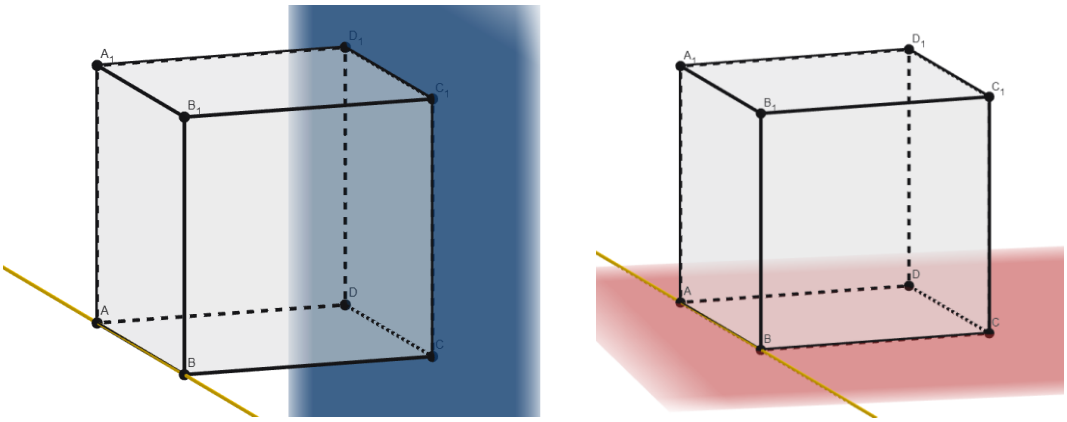

Рисунок 2. Исследование параллельности прямой и плоскости

3.3. Построение сечений многогранников

Задача. Дан тетраэдр SABC. Точки M, N и P являются серединами рёбер SA, SB и AC соответственно. Требуется построить сечение тетраэдра плоскостью MNP и определить вид полученного многоугольника.

Точки M и N лежат на грани SAB, поэтому отрезок MN принадлежит секущей плоскости. Точки M и P лежат на грани SAC, следовательно, MP также принадлежит ей. Поскольку M и N — середины сторон треугольника SAB, имеем $MN \parallel AB$. Поэтому линия пересечения секущей плоскости с основанием ABC проходит через P параллельно AB и пересекает BC в точке Q. По теореме о средней линии треугольника ABC точка Q — середина BC.

Искомое сечение — четырёхугольник MNQP. При этом $MN \parallel PQ$, а $MP \parallel NQ$ как средние линии соответствующих треугольников. Следовательно, MNQP — параллелограмм. Полученную конструкцию можно проверить на динамической модели, а затем предложить обучающимся перемещать точку P вдоль AC и исследовать, когда сечение сохраняет форму параллелограмма.

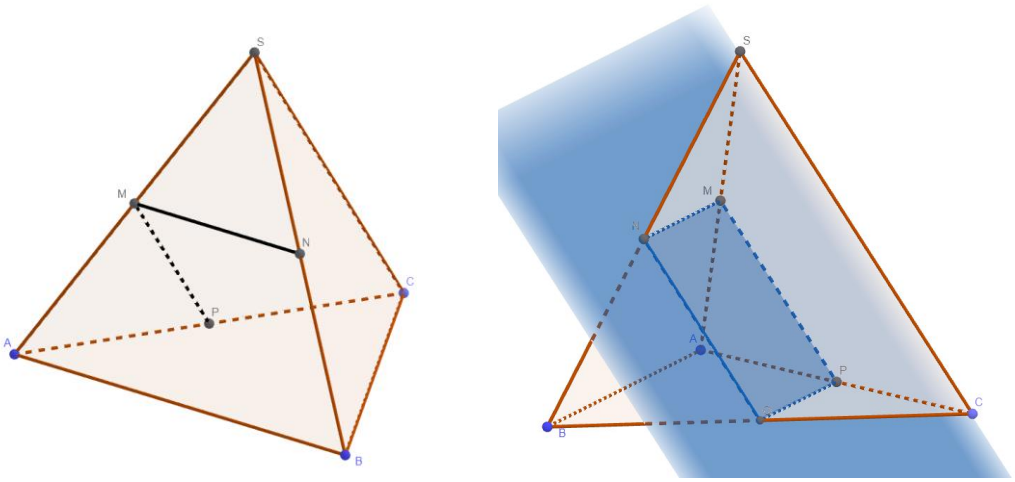

Рисунок 3. Построение сечения тетраэдра плоскостью через три точки M, N, P.

4. Организация учебной деятельности

Работу с GeoGebra 3D можно организовать фронтально с интерактивной доской либо в парах за компьютерами. Для исследовательского фрагмента урока продолжительностью 15–20 минут предлагается следующая последовательность: постановка геометрической задачи; самостоятельное предположение обучающихся; проверка на динамической модели; теоретическое доказательство; закрепление на бумаге без готовой модели.

Особое значение имеет завершающий этап: он позволяет проверить, насколько ученик способен применять изученные геометрические отношения независимо от компьютерной подсказки.

5. Оценивание образовательных результатов

Оценивать эффективность работы целесообразно по качеству математических действий, а не по самому факту использования программы. В качестве критериев можно использовать правильность определения взаимного расположения объектов, самостоятельность выбора способа построения, точность чертежа, обоснованность решения и способность объяснять полученный результат без обращения к динамической модели.

Для диагностики подойдут сопоставимые задания до и после изучения темы, наблюдения за работой обучающихся, самостоятельные построения и анализ характерных ошибок.

6. Авторская практика

В качестве примера применения интерактивной среды GeoGebra 3D рассмотрим организацию урока геометрии в 10 классе по теме «Аксиомы стереометрии и следствия из них».

Тип урока: урок открытия нового знания.

Продолжительность: 45 минут.

Учебно-методическое обеспечение: учебник Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 10–11 классы», пункты 2–3 введения.

Оборудование: компьютер учителя, проектор или интерактивная доска, GeoGebra 3D, традиционные чертёжные принадлежности.

Цель урока: создание условий для формирования первоначальных представлений об аксиоматическом построении стереометрии, изучения основных аксиом о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей, а также применения этих аксиом при доказательстве геометрических утверждений.

Планируемые образовательные результаты

Предметные:

- Знать и формулировать три основные аксиомы стереометрии.
- Распознавать взаимное расположение точек, прямых и плоскостей на пространственных моделях и чертежах.
- Формулировать следствия из аксиом стереометрии и использовать их при решении простейших задач.
- Различать наглядную проверку геометрического предположения и его математическое доказательство.

Метапредметные:

- Выдвигать гипотезы на основе наблюдения геометрических объектов.
- Анализировать пространственные модели и устанавливать зависимости между их элементами.
- Формулировать выводы, аргументировать собственную позицию.
- Использовать цифровые средства для исследования математических объектов.

Личностные:

- Развивать интерес к исследовательской деятельности.
- Формировать ответственное отношение к учебной деятельности и культуре математического доказательства.
- Развивать готовность к конструктивному обсуждению различных способов решения.

Ход урока

1. Организационный этап (2 минуты)

Учитель приветствует обучающихся, проверяет готовность к уроку и сообщает, что изучение стереометрии предполагает переход от геометрических фигур на плоскости к пространственным объектам.

Обращается внимание на то, что уже знакомые обучающимся понятия точки и прямой сохраняются, но в стереометрии появляется ещё один основной объект — плоскость.

2. Актуализация знаний (5 минут)

Учитель организует фронтальную беседу, направленную на повторение базовых понятий планиметрии.

Примерные вопросы:

1. Какие геометрические фигуры называют основными в планиметрии?
2. Сколько прямых можно провести через две различные точки?
3. Можно ли провести несколько различных прямых через одну точку?
4. Что понимают под аксиомой в математике?
5. Чем аксиома отличается от теоремы?

В ходе обсуждения обучающиеся вспоминают, что аксиомы принимаются без доказательства и используются в дальнейшем для обоснования других геометрических утверждений.

3. Создание проблемной ситуации и целеполагание (4 минуты)

Учитель демонстрирует пространственную модель, содержащую несколько точек и плоскость.

Обучающимся предлагается ответить на вопрос:

«Всегда ли через три произвольные точки пространства можно провести единственную плоскость?»

На первоначальном этапе выдвигаются различные предположения. Учитель предлагает рассмотреть случаи, когда три точки лежат на одной прямой и когда они не принадлежат одной прямой.

Возникает необходимость сформулировать условия, определяющие взаимное расположение точек, прямых и плоскостей.

Совместно с учителем обучающиеся формулируют цель урока: познакомиться с основными аксиомами стереометрии, исследовать их геометрический смысл и научиться применять полученные знания при решении задач.

4. Открытие нового знания: аксиомы стереометрии (15 минут)

Изучение аксиом организуется с использованием динамических моделей GeoGebra 3D.

Работа над каждой аксиомой предполагает последовательное выполнение следующих действий:

1. Наблюдение пространственной модели.
2. Выдвижение предположения о взаимном расположении объектов.
3. Проверка предположения при изменении модели.
4. Формулирование аксиомы.
5. Выполнение соответствующего чертежа в тетради.

Аксиома A_1. О плоскости, проходящей через три точки.

Учитель организует исследование расположения трёх точек пространства и условий, при которых они определяют единственную плоскость.

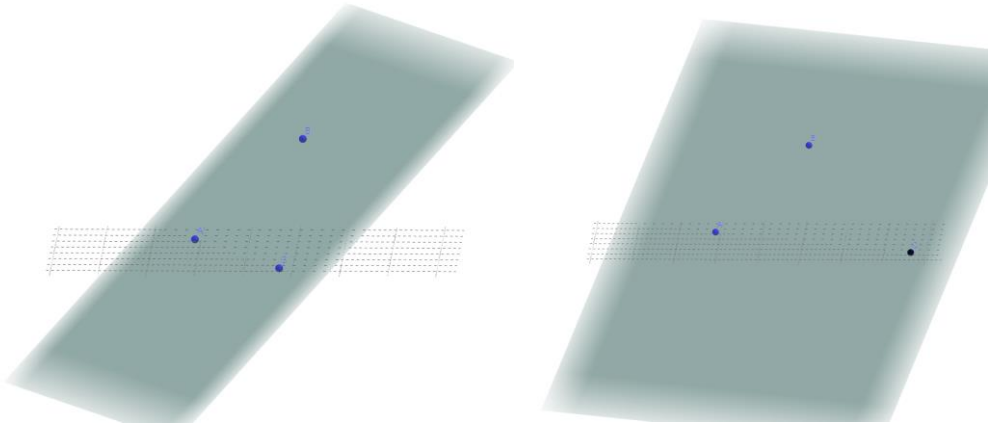

Рисунок 4. Демонстрация Аксиомы A_1

После исследования формулируется аксиома: через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна. На рисунке 4 мы показываем обучающимся, что изменение положения одной из трёх точек даёт совершенно разные плоскости, что как раз и демонстрирует первую аксиому.

Аксиома A_2. О принадлежности прямой плоскости.

Следующий этап посвящается исследованию принадлежности точек прямой некоторой плоскости.

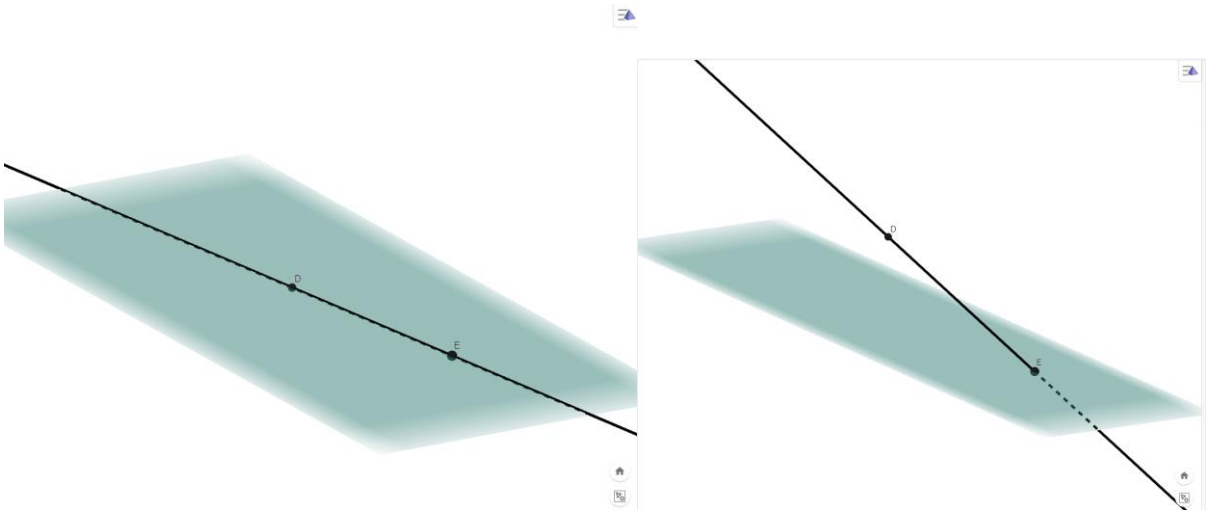

Рисунок 5. Демонстрация Аксиомы A_2

На рисунке 5 демонстрируется выполнение аксиомы A_2, где мы можем показать обучающимся, как принадлежность точки D нашей плоскости влияет на взаимное расположение прямой DE и плоскости. Если обе точки лежат в плоскости, то мы видим, что и прямая, заданная этими точками, также лежит в этой плоскости. Но если бы точка D этой плоскости не принадлежала, то мы видим, что прямая DE эту плоскость пересекает, то есть имеет только одну общую точку с плоскостью. Также мы можем показывать здесь, что при сколь угодно близком расположении точек D и E, прямая всё равно будет пересекать плоскость при условии, что D ей не принадлежит.

Отсюда обучающиеся формулируют вывод: если две точки прямой принадлежат некоторой плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Учитель предлагает дополнительный вопрос:

«Может ли прямая иметь с плоскостью ровно две общие точки?»

Ответ обучающихся должен опираться на изученную аксиому.

Аксиома A_3. О пересечении двух плоскостей.

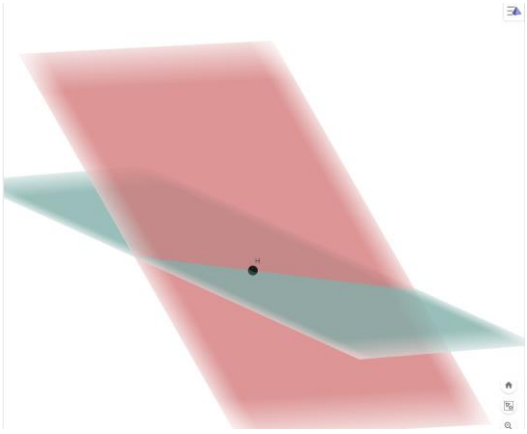

Рисунок 6. Демонстрация Аксиомы A_3

Обращаем внимание обучающихся на то, что две плоскости, имея одну общую точку, на самом деле пересекаются. И непосредственно из рисунка видно, линия их пересечения является прямой. Мы можем менять масштаб чертежа, увеличивая или уменьшая расстояние, показывая тем самым, что, во-первых, плоскость неограниченная фигура, а, следовательно, во-вторых, продолжение плоскости рано или поздно пересечёт плоскость в прямой (а не только в одной общей точке), которая будет общей для обеих плоскостей. Последний момент акцентирует внимание на искаженном представлении о плоскости. Распространенная практика изображать

плоскость в виде ограниченной фигуры, позволяет обучающимся полагать, что одна плоскость будет касаться условной «вершиной» другой плоскости, что приводит к тому, что никакой общей прямой для этих двух плоскостей нет. А это противоречит третьей аксиоме.

После чего обучающиеся формулируют аксиому: если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все их общие точки.

После рассмотрения трёх аксиом проводится краткое обобщение. Учитель обращает внимание на то, что динамическая модель помогла исследовать геометрические отношения, однако справедливость аксиом не устанавливается экспериментально: они принимаются как исходные положения геометрии.

5. Изучение следствий из аксиом стереометрии (9 минут)

Учитель подводит обучающихся к необходимости установить, какие новые утверждения можно получить на основании изученных аксиом.

Рассматриваются два следствия.

Первое следствие. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Обучающимся предлагается определить, какие элементы необходимо выбрать на заданной прямой, чтобы воспользоваться аксиомой A_1.

В ходе обсуждения устанавливается, что достаточно выбрать две различные точки прямой и рассмотреть их совместно с точкой, не лежащей на данной прямой.

На основании аксиомы A_1 определяется единственная плоскость, проходящая через полученные три точки. Затем с помощью аксиомы A_2 обосновывается принадлежность всей прямой данной плоскости.

Таким образом, обучающиеся знакомятся с построением доказательства, основанного на последовательном применении нескольких аксиом.

Второе следствие. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Для доказательства рассматриваются две прямые, пересекающиеся в точке (M). На одной из прямых выбирается дополнительная точка (N), отличная от (M).

Используя первое следствие, обучающиеся устанавливают существование единственной плоскости, проходящей через другую прямую и точку (N). По аксиоме A_2 обе пересекающиеся прямые принадлежат этой плоскости.

После доказательства учитель предлагает определить, какие из ранее изученных аксиом использовались и почему необходимо условие пересечения прямых.

6. Первичное закрепление (6 минут)

Для проверки понимания нового материала обучающимся предлагаются короткие задания.

Задание 1. Точки A и B принадлежат плоскости α. Точка M лежит на прямой AB. Докажите, что M принадлежит плоскости α.

Задание 2. Две различные плоскости имеют одну общую точку. Могут ли они не иметь других общих точек? Ответ обоснуйте.

Задание 3. Прямые a и b пересекаются в точке O. Сколько плоскостей можно провести через обе прямые? На какое утверждение следует сослаться?

Обучающиеся самостоятельно выполняют задания, после чего проводится фронтальная проверка с обязательным объяснением использованной аксиомы или теоремы.

На данном этапе динамические модели используются только при необходимости проверки затруднений. Приоритет отдаётся самостоятельному математическому рассуждению.

7. Рефлексия и оценивание достижения цели (3 минуты)

Для организации рефлексии учитель предлагает обучающимся закончить следующие высказывания:

- «Сегодня я узнал, что…»
- «Для доказательства геометрического утверждения необходимо…»
- «Компьютерная модель помогла мне понять…»
- «Наибольшее затруднение у меня вызвало…»

Дополнительно обучающиеся оценивают собственную готовность сформулировать аксиомы и применить их в простейших геометрических ситуациях.

На основании ответов учитель выявляет типичные затруднения, требующие дополнительного внимания на следующем занятии.

8. Домашнее задание (1 минута)

Изучить пункты 1–3 на страницах 3-7, вопросы и задачи №1-5.

Повторить формулировки трёх аксиом стереометрии и двух следствий из них.

Использование GeoGebra 3D на данном уроке направлено на преодоление трудностей, связанных с восприятием пространственных геометрических объектов по плоскому изображению.

Динамическая визуализация позволяет обучающимся исследовать расположение точек, прямых и плоскостей, рассматривать модели под различными углами и устанавливать связи между наблюдаемыми геометрическими отношениями и формулировками аксиом.

Принципиальное значение имеет то, что цифровая демонстрация не заменяет доказательство, а используется в качестве средства постановки учебной проблемы, организации наблюдения и формирования первоначальных геометрических представлений.

При изучении следствий из аксиом основное внимание переносится с визуального наблюдения на самостоятельное рассуждение и обоснование.

Таким образом, предлагаемый урок сочетает традиционные методы преподавания стереометрии с возможностями интерактивной математической среды, создавая условия для формирования пространственного мышления и исследовательских умений обучающихся.

7. Ограничения и условия применения

Цифровая визуализация не должна заменять самостоятельную работу с чертежом: построение сечений необходимо отрабатывать и на бумаге. Демонстрация готовой модели сама по себе не гарантирует понимания — нужны вопросы на обоснование и самостоятельный выбор решения. Кроме того, использование программы должно учитывать доступное оборудование и подготовленность класса. В условиях ограниченного числа устройств возможна фронтальная работа с заранее подготовленными моделями.

Заключение

Использование GeoGebra 3D создаёт дополнительные возможности для изучения стереометрии в старших классах: помогает наглядно представить пространственные отношения, организовать проверку гипотез и поддержать исследовательскую деятельность обучающихся. Особенно значимым является переход от наблюдаемого результата к математическому доказательству. При таком подходе цифровой инструмент выступает средством формирования геометрического мышления, а не самостоятельной целью урока.

Список источников

1. Федеральная образовательная программа среднего общего образования, утверждённая приказом Минпросвещения России от 18.05.2023 № 371 (с изменениями). Раздел «Математика. Геометрия».

2. GeoGebra. 3D Calculator: справочные материалы на официальном сайте. URL: https://help.geogebra.org/hc/en-us/articles/8493632359069-3D-Calculator (дата обращения: 20.11.2026).

3. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа: геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни. — 7-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 2019. – 287 с.