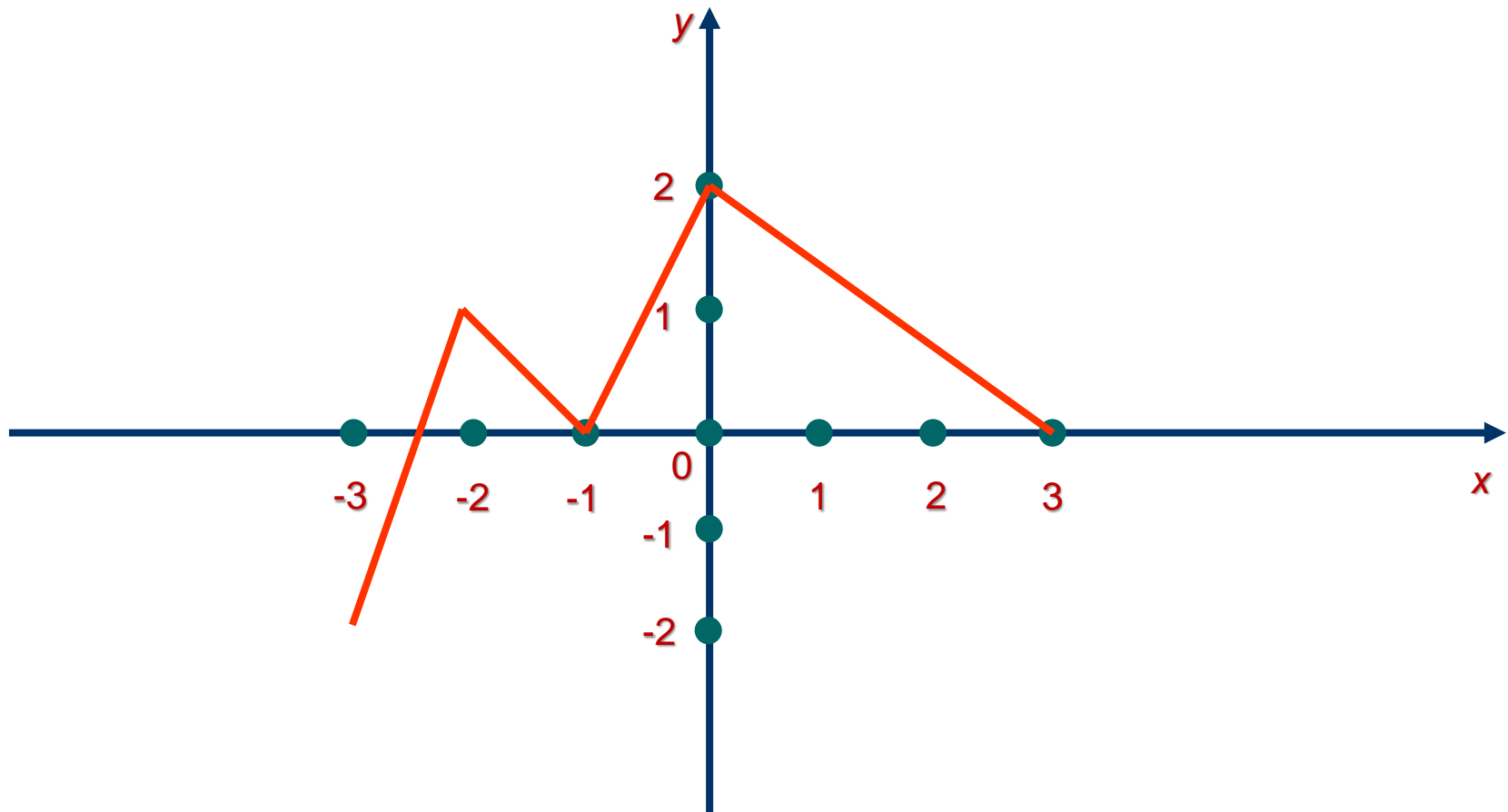


Периодические функции

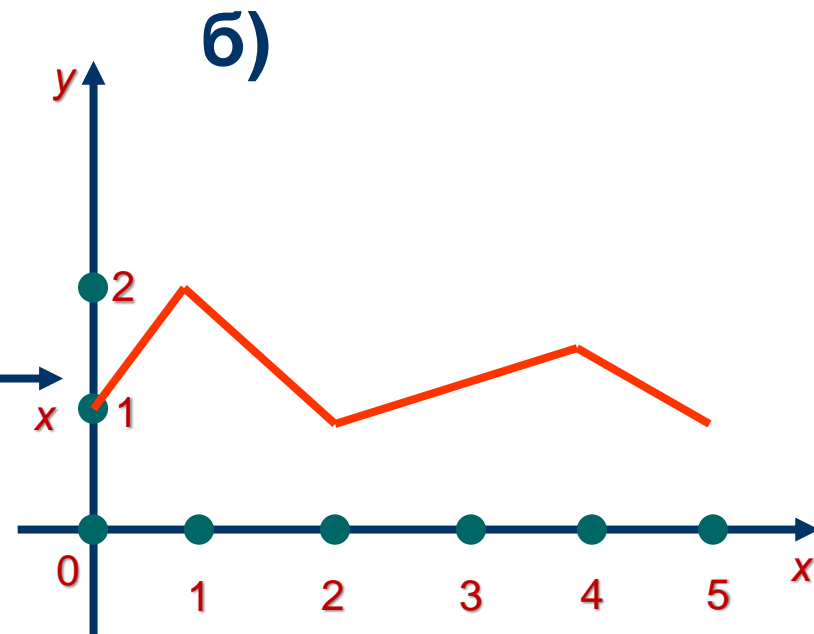
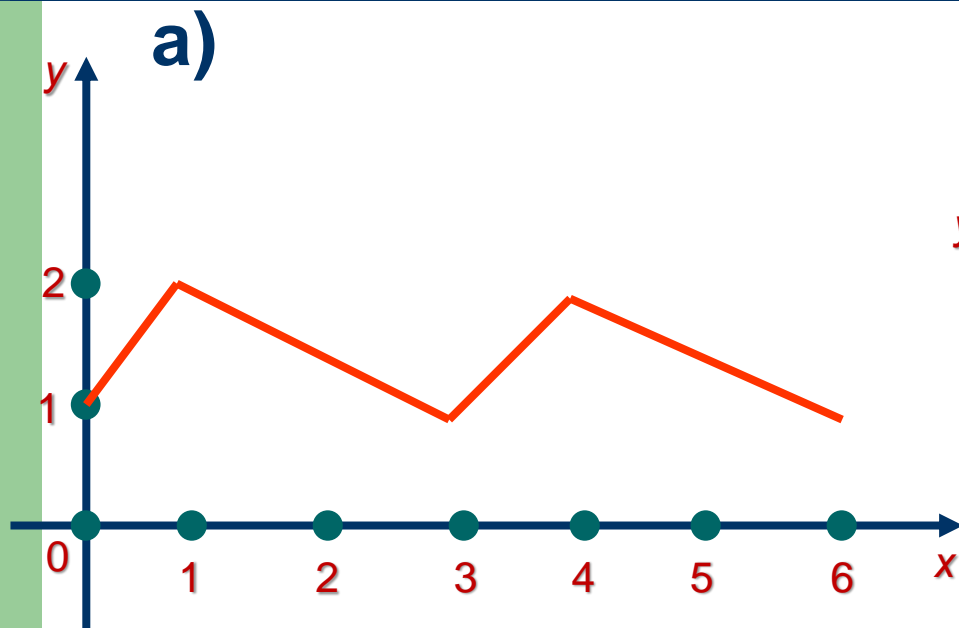
10 класс с углублённым
изучением математики

Жакупова С. А., учитель математики
МАОУ города Новосибирска
«Гимназия № 3 в Академгородке»

1. На рисунке изображена часть графика периодической функции, определенной на всей числовой прямой с периодом $T=6$.
Найдите: а) $f(34)$; б) $f(41)$



2. На рисунке изображена часть графика периодической функции f , определенной на всей числовой прямой. Каким может быть наименьший положительный период функции f ?



**3. Постройте график функции.
Является ли данная функция
периодической?**

$$f(x) = \{x\}$$

$$f(x) = [x]$$

$$f(x) = \{x\} + 1$$

$$f(x) = [x - 1]$$

4. Найдите значение функции $f(19)$, если известно, что функция $y=f(x)$ – четная, имеет период 10 и на отрезке $[0;5]$ функция имеет вид $y = 15 + 2x - x^2$

● Решение:

$$f(19) = f(20-1) = f(-1) = f(1) = 15 + 2 \cdot 1 - 1^2 = 16$$

Ответ: 16.

5. Докажите, что число $T = \frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = \sin 4x$

Доказательство:

$$y(x) = y(x + T)$$

$$y(x) = \sin 4x$$

$$y(x + T) = \sin 4(x + T) = \sin(4x + 4T)$$

$$4T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{4}$$

$$T = \frac{\pi}{2}$$

$$y(x + T) = y\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 2\pi) = \sin 4x = y(x)$$

6. Найти наименьший положительный период функции $y = \cos 2x$

Решение:

$$y(x) = y(x + T)$$

$$y(x) = \cos 2x$$

$$y(x + T) = \cos 2(x + T) = \cos(2x + 2T)$$

$$2T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{2}$$

$$T = \pi$$

Ответ : π

7. Найти основной период функции:

1) $y = \sin \frac{5x}{2} + \cos \frac{2x}{3}$; 2) $y = -\frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - 3x \right)$

1) Решение:

$$y = \sin \frac{5x}{2} + \cos \frac{2x}{3}$$

$$y_1 = \sin \frac{5x}{2}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\left| \frac{5}{2} \right|} = \frac{4\pi}{5}$$

$$y_2 = \cos \frac{2x}{3}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\left| \frac{2}{3} \right|} = 3\pi$$

$$T = \text{НОК}(T_1, T_2) = \text{НОК}\left(\frac{4\pi}{5}; 3\pi\right) = \text{НОК}(4\pi; 3\pi) = 12\pi$$

Ответ: 12π

2) Решение:

$$-\frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - 3x \right) = -\frac{1}{2} * \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 6x \right)}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 6x \right)$$

$$y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 6x \right)$$

$$y_1 = -\frac{1}{4}$$

T_1 – любое число; наименьшего положительного периода не существует.

$$y_2 = \frac{1}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 6x \right)$$

$$T_2 = \text{НОК}(T_1, T_2) = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$

8. Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $y = \sin((2a + 5)x)$ равен $\frac{\pi}{2}$

Решение:

$$y = \sin((2a + 5)x)$$

$$T = \frac{2\pi}{|2a + 5|}$$

$$T = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{|2a + 5|} = \frac{\pi}{2}$$

$$|2a + 5| = 4$$

1) $2a + 5 = -4$

$$a = -\frac{9}{2}$$

или

2) $2a + 5 = 4$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{9}{2} * \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2,25$$

Ответ : 2,25

9. Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $y = \sin^2((a^2 - 4a - 21)x)$ равен $\frac{\pi}{24}$

Решение:

$$y = \sin^2((a^2 - 4a - 21)x)$$

$$\sin^2((a^2 - 4a - 21)x) = \frac{1 - \cos(2(a^2 - 4a - 21)x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2(a^2 - 4a - 21)x)$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2(a^2 - 4a - 21)x)$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}\cos(2(a^2 - 4a - 21)x)$$

$$a^2 - 4a - 21 = -24$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$D > 0$$

$$a_1 * a_2 = 3$$

или

$$a^2 - 4a - 21 = 24$$

$$a^2 - 4a - 45 = 0$$

$$D > 0$$

$$a_3 * a_4 = -45$$

$$a_1 * a_2 * a_3 * a_4 = 3 * (-45) = -135$$

Ответ : -135

$$y_1 = \frac{1}{2}$$

$$T_2 = \frac{\pi}{|a^2 - 4a - 21|}$$

$$T = \frac{\pi}{|a^2 - 4a - 21|}$$

$$T = \frac{\pi}{24}$$

$$\frac{\pi}{|a^2 - 4a - 21|} = \frac{\pi}{24}$$

$$|a^2 - 4a - 21| = 24$$

T_1 - любое число

10. Задания для самостоятельной работы: вычислить основной период функций

1. $y = \sin x$

2. $y = \cos 3x$

3. $y = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{4}$

4. $y = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

5. $y = -\frac{1}{3} \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{3})$

6. $y = -\frac{1}{2} \sin \frac{3x}{4} + 4 \cos \frac{2x}{3}$

7. $y = 5 \sin^2(\frac{\pi}{8} - 3x)$

8. Найдите значение параметра (или произведения таких значений, если их несколько), при которых период функции

$$y = \cos^2((a^2 - 2a - 28)x)$$

равен $\frac{\pi}{20}$.

(Ответ: 384)