Тема. Выборка корней при решении тригонометрических уравнений.

Цели. Научить выбирать корни тригонометрических уравнений, удовлетворяющие условию, повторяя через это решение стандартных тригонометрических уравнений. Развивать мыслительную деятельность. Воспитывать интерес к изучаемой теме.

1. **Актуализация опорных знаний (3 мин.)**

Заставка на интерактивной доске.

Простейшие	Исключения	
$\sin x = a, x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$	$\sin x = 0, x = \pi k, k \in Z$	$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
$\cos x = a, x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$	$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$	$\cos x = 1, x = 2\pi k, k \in Z$
$tgx = a, x = \mathrm{arc}tga + \pi k, k \in Z$	$\sin x = -1, x = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$	$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi k, k \in Z$
$ctgx = a, x = arcctga + \pi k, k \in Z$		

2. Задание промежутка из которого выбираем корни (7 мин.)

Заставка на интерактивной доске.

Найдите корни уравнения $(\sin 2x + \sin\frac{\pi}{6})(\sin 2x - 3) = 0$, принадлежащие промежутку $\left[0;\pi\right]$

$\sin 2x + \sin\frac{\pi}{6} = 0$, $\sin 2x - 3 = 0$,

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$, $\sin 2x = 3$,

$2x = (-1)^{k+1} \bullet \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z,$ $x \in \varnothing, m.к. \sin 2x \in [-1;1]$

$x = (-1)^{k+1} \bullet \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Если k=0, $x = -\frac{\pi}{12} \notin [0;\pi];$ если k = 1, $x = \frac{7\pi}{12} \in [0;\pi];$

если k=2, $x = \frac{11\pi}{12} \in [0;\pi];$ если $k \geq 3,$ то $x > \pi$;

если $k \leq 0$, то $x < 0$.

Ответ: $\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}$.

Задание 1.

B1 $3\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1, (-\frac{\pi}{2}; 0)$ (1 балл)

B2 $2\cos x \cdot \cos 4x + \cos x - 2\cos 4x - 1 = 0, [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (1 балл)

B3 $tgx = 1, [-\pi; \pi]$ (0,5 балла)

3. Модуль – замаскированный промежуток. (7 мин)

<u>Заставка на интерактивной доске.</u>

Решите уравнение 1 + 3 | sin x | = 2 cos 2x.

Если $\sin x \geq 0, x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in Z,$ то

$1 + 3\sin x = 2 - 4\sin^2 x, 4\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0,$

$\sin x = -1, x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \quad x_1 \notin [2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in Z,$

$\sin x = \frac{1}{4}, x_2 = (-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{4} + \pi k, k \in Z, x_2 \in [2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in Z$

Если $\sin x < 0, x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in Z$, то

$1 - 3\sin x = 2 - 4\sin^2 x, 4\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0,$

$\sin x = 1, x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, x_3 \notin (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k) k \in Z$

$\sin x = -\frac{1}{4}, x_4 = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\frac{1}{4} + \pi k, k \in Z, x_4 \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in Z$

Ответ: $(-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{4} + \pi k, k \in Z; (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\frac{1}{4} + \pi k, k \in Z$

Задание 2

B1 $8\cos x + |\cos x| = 2\sin x$ (1 балл)

B2 $5\sin^2 x + 8\cos x + 1 = |\cos x| + \cos^2 x$ (1 балл)

B3 $|\sin x| + \sin x = 1$ (0,5 балла)

4. ОДЗ – замаскированный промежуток. (7 мин)

Заставка на интерактивной доске.

Решите уравнения: $\dfrac{\cos x}{\sqrt{25-x^2}}=0, \dfrac{2\sin x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$

1) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{25-x^2}}=0, ОДЗ: 25-x^2>0, x\in(-5;5)$

$\cos x=0, x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

Если k=0, $x=\dfrac{\pi}{2}\in(-5;5)$; если k=1, $x=\dfrac{3\pi}{2}\in(-5;5)$;

Если k=2, $x=\dfrac{5\pi}{2}\notin(-5;5)$; если $k\geq 2$, $x\succ 5$;

Если k=-1, $x=-\dfrac{\pi}{2}\in(-5;5)$; если k=-2, $x=-\dfrac{3\pi}{2}\in(-5;5)$;

Если k = -2, $x=-\dfrac{5\pi}{2}\notin(-5;5)$; если $k\leq -2$, $x<-5$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{2};\pm\dfrac{3\pi}{2}$

2) $\dfrac{2\sin x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$, ОДЗ: $\cos x\neq -\dfrac{1}{2}, x\neq\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

$x\in(-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k)\cup(\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k), k\in Z$

$2\sin x-\sqrt{3}=0$, $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x=(-1)^k\bullet\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$

Если k = 2n, $x_1=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z, x_1\in ОДЗ$,

если k = 2n + 1, $x_2=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ $x_2\notin ОДЗ$

Ответ: $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

Задание 3.

B1 $\dfrac{\cos x-1}{\cos x}+2ctgx\bullet\sin x=0$ (1 балл)

B2 $(1-2\sin^2 x)\sqrt{9-x^2}=0$ (1 балл)

В3 $\frac{2\sin x+1}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$ (1 балл)

5. Выбор корней, используя $-1\le \sin\tau, \cos\tau \le 1$ **(7 мин)**

<u>Заставка на интерактивной доске.</u>

Решите уравнение $tg(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x)=1$

$$\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z, \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x=-\frac{5\pi}{4}+\pi k, k\in Z$$

$$\sin x=-\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{4k}{\sqrt{2}}, k\in Z, \sin x=-\frac{5\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}k, k\in Z$$

Т.к. $\sin x\in[-1;1]$, то $-1\le -\frac{5\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}k\le 1$,

$$\frac{5\sqrt{2}-2}{2}\le 2\sqrt{2}k\le \frac{5\sqrt{2}+2}{2}, \frac{5\sqrt{2}-2}{4\sqrt{2}}\le k\le \frac{5\sqrt{2}+2}{4\sqrt{2}}, \frac{5-\sqrt{2}}{4}\le k\le \frac{5+\sqrt{2}}{4}, k\in Z$$

Т.к. $k\in Z$, то $k=1$, значит $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=(-1)^{n+1}\bullet\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

Ответ: $(-1)^{n+1}\bullet\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

Задание 4.

В1 $\sin(\cos x)=0,5$ (1 балл)

В2 $ctg(\pi\cos x)=\sqrt{3}$ (1 балл)

В3 $\cos(\sin x+\frac{\pi}{4})=1$ (1 балл)

6. Использование выборки корней тригонометрического уравнения при нахождении значений обратных тригонометрических функций. (7 мин)

<u>Заставка на интерактивной доске.</u>

Вычислите $arctg(ctg\frac{41\pi}{9})$

По определению $arctg(ctg\frac{41\pi}{9}) = \tau, \tau \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

$$tg\tau = ctg\frac{41\pi}{9}, \frac{\sin\tau}{\cos\tau} = \frac{\cos\frac{41\pi}{9}}{\sin\frac{41\pi}{9}}, \cos\tau\cos\frac{41\pi}{9} - \sin\tau\sin\frac{41\pi}{9} = 0,$$

$$\cos(\tau + \frac{41\pi}{9}) = 0, \tau + \frac{41\pi}{9} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$\tau = -\frac{73\pi}{18} + \pi k, k \in Z$$

Т.к. $\tau \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}), mo -\frac{\pi}{2} < -\frac{73\pi}{18} + \pi k < \frac{\pi}{2}, \frac{32\pi}{9} < \pi k < \frac{41\pi}{9},$

$\frac{32}{9} \prec k \prec \frac{41}{9}, m.к. k \in Z,$ то $k = 4,$ значит $\tau = -\frac{73\pi}{18} + 4\pi = -\frac{\pi}{18}$

Ответ: $arctg(ctg\frac{41\pi}{9}) = -\frac{\pi}{18}$

Задание 5.

В1 $\arccos(\sin 12)$ (1 балл)

В2 $\arcsin(\cos 12)$ (1 балл)

В3 $\mathrm{arc}\,ctg(tg\frac{41\pi}{9})$ (1 балл)

7. Подведение итогов (4 мин.)

Высветить ответы на интерактивной доске, дети сами себя проверяют: 4;5 баллов – «5», 3 балла – «4», 2 балла – «3», 1 балл – «2», сдают работы учителю.

	В1	В2	В3
Задание 1	$-\frac{\pi}{4}; -\mathrm{arc}\,tg\frac{1}{2}$	$0; \pm\frac{\pi}{3}; \pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$
Задание 2	$\mathrm{arc}\,tg 4,5 + 2\pi k, k \in Z$ $\mathrm{arc}\,tg 3,5 + \pi + 2\pi k, k \in Z$	$\pm\arccos\frac{7+\sqrt{193}}{12} + 2\pi k, k \in Z$ $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$	$(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$
Задание 3	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$	$\pm\frac{\pi}{4}; \pm\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$
Задание 4	$\pm\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$	$\pm\arccos\frac{1}{6} + 2\pi k, k \in Z$ $\pm\arccos(-\frac{5}{6}) + 2\pi k, k \in Z$	$(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Задание 5	$\frac{9\pi - 24}{2}$	$\frac{24 - 7\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{18}$

8. Домашнее задание (3 мин)

а) Решите уравнения:

$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 0;$ $\qquad \frac{\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(x-3)(4-x)}} = 0;$ $\qquad \cos(\sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

$2\sqrt{3}\sin x tgx + 3tgx = 2\sin x + \sqrt{3};$

$\frac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x, \qquad x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}];$

$(|\sqrt{3}\sin x - \cos x| - 1) \bullet \sqrt{1 - x^2} = 0$

б) Вычислите:

$\operatorname{arc} tg(ctg \frac{3\pi}{5});$ $\qquad \arcsin(\cos 2002);$ $\qquad \arcsin^2(\cos 96)$