Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Средняя школа №19-корпус кадет «Виктория»

Старооскольского городского округа

**Конспект урока**

**по учебному предмету «Математика (геометрия)»**

**в 11 классе**

**на тему**

**«Комбинации шара с геометрическими телами»**

Наименование УМК: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия:10-11 классы: базовый и углубленный уровни: учебник /Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев [и др.].- 11-е изд., стер. - Москва: Просвещение, 2023. - 287с.

Булухта Елена Владимировна,

учитель математики,

2024

**Тип урока:** урок ознакомления с новым материалом.

**Цель урока:** ввести понятие вписанного (описанного) шара (сферы) около многогранника и тел вращения, выяснить условия их существования;

научить учащихся применять введенные понятия при решении задач на комбинации тел: шара с пирамидой, шара с призмой, шара с цилиндром, шара с конусом.

**Учебные задачи:**

1. обобщить теорию по теме, выявить и устранить пробелы в теоретических знаниях;
2. выделить ключевые задачи по теме;
3. выделить особенности каждой группы задач.

**Оборудование для урока:** компьютер учителя, проектор для демонстрации презентации, компьютеры (ноутбуки) для учащихся.

**Формы обучения:**индивидуальная, групповая, фронтальная.

**Методы:**словесный, наглядно-иллюстративный, частично-поисковый

**I. Организационный момент (1 минута)**

**Слайд 1**

**Учитель.** Сегодняшний урок хотелось начать со слов древнекитайского философа Конфуция: «Я услышал и забыл. Я увидел и запомнил. Я сделал и понял».

**II. Актуализация знаний (3 минуты)**

**Слайд 2**

**Учитель.** На протяжении ряда уроком мы с вами изучали геометрические тела. Какие геометрические тела вы знаете? (пирамида, призма, конус, цилиндр, шар). Давайте проверим; Вы услышали и забыли? Или это не так? Предлагаю написать математический диктант на знание формул площадей и объемов геометрических тел с взаимной проверкой

**Слайд 3 (проверка)**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 вариант | 2 вариант |
| Объем цилиндра | Объем конуса |
| Площадь боковой поверхности прямой призмы | Площадь боковой поверхности пирамиды |
| Объем призмы | Объем прямоугольного параллелепипеда |
| Объем шара | Площадь поверхности шара |
| Площадь боковой поверхности конуса | Площадь боковой поверхности цилиндра |

**Слайд 4**

**Учитель.** Мы постоянно встречаем эти тела в окружающем нас мире. Предлагаю рассмотреть здания и прокомментировать особенности их форм. *Ответы учащихся.* Все эти здания состоят из геометрических тел: цилиндра, полусферы, сферы, параллелепипеда. Особенность последнего сооружения в том, что оно состоит из нескольких тел, находящихся друг в друге.

**Учитель.** Шары, как и другие геометрические тела, можно комбинировать друг с другом самыми разными способами. Предлагаю вам сформулировать тему нашего урока

*Ответы учеников.* Комбинации сферы с геометрическими телами.

**III. Постановка проблемы (4 минуты)**

**Учитель.** Комбинация тел как мы уже сказали бывает разная, но нас сегодня будет интересовать ситуация, когда одно тело находится внутри другого, говорят, что является вписанным в данное тело или описано около данного тела. Для изучения данного вопроса необходимо повторить с вами тему «Вписанные и описанные многоугольники в планиметрии» **(**фронтальный опрос). **Слайд 5-6**

* Какой многоугольник называется вписанным в окружность? *(****Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на одной окружности*)**
* Всякий ли треугольник можно вписать в окружность? (*Нет*)
* Где находится центр окружности, описанной около треугольника? (*Центр находится в точке пересечения серединных перпендикуляров)*
* Где будет находиться эта точка (центр окружности) в остроугольном, прямоугольном, тупоугольном треугольнике? (*Внутри треугольника, на середине гипотенузы, вне треугольника)*
* Как найти радиус описанной около треугольника окружности? (, )
* Всякий ли четырехугольник можно вписать в окружность? *(Нет)*
* Каким свойством обладает четырехугольник, вписанный в окружность? *(Сумма противолежащих углов равна 1800)*
* Какой многоугольник называется описанным около окружности?

***(Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются сторон данного многоугольника)***

* **Где находится центр окружности, вписанной в треугольник? *(Центр находится в точке пересечения биссектрис)***
* **Как найти радиус вписанной окружности? *(****Радиус r окружности, вписанной в треугольник, находится по формуле* *, где S - площадь, p - полупериметр треугольника)*
* **Каким свойством обладает четырехугольник, описанный около окружности *(Сумма длин противолежащих сторон равна)***

**IV. Объяснение нового материала (15 мин)**

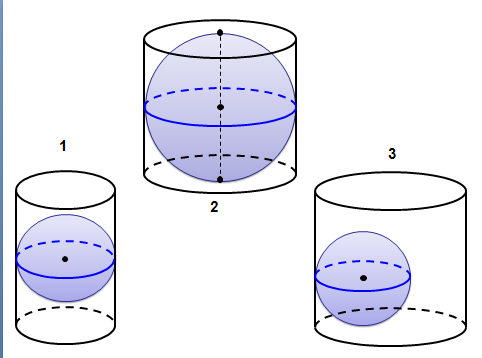
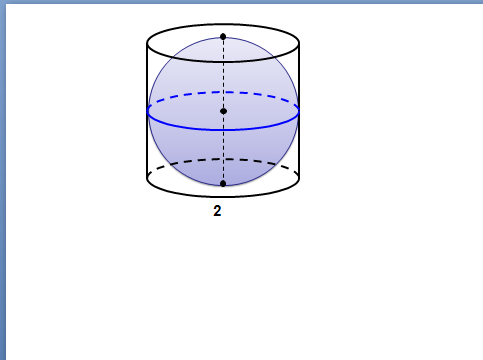
**Проводиться в виде исследовательской работы**

На столах у вас лежат листы с заданиями. Перед вами комбинации шара с другими телами: цилиндром, конусом, пирамидой и прямой призмой. Работаем парами. Для каждой пары своя комбинация. У вас 3 изображения, выделите то, на котором шар будет вписан в геометрическое тело или описан около него. Дайте определение вписанного и описанного шара и определите расположение центра шара проводя аналогию с понятием вписанной и описанной окружности около многоугольника, определите, что является радиусом и какие существуют особенности и соотношения между величинами. При выполнении задания обсудите в паре ответы и заполните таблицу 1, при этом можно использовать записи в тетради, материал учебника (n. 48, 49, 50, 51). Учитель индивидуальная оказывает помощь нуждающимся. На работу 1-2 минуты. (приложение 1)

Закончили работу?

**Слайд 7**

**Учитель.** Ситуация 1. Итак, кто работал с шаром, вписанным в цилиндр? Какую из предложенных комбинаций вы выбрали и почему?

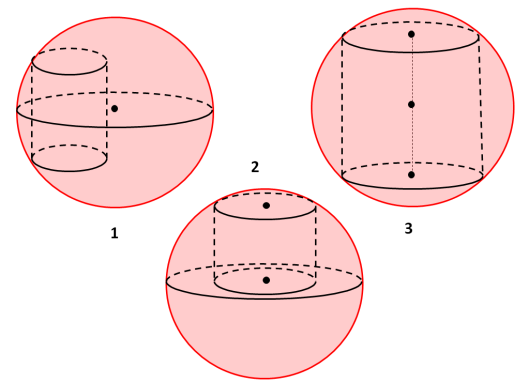
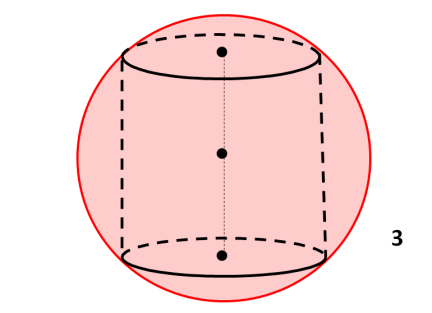
**Ученики** выбирают и обосновывают свой выбор. 1 пара: 2-й рисунок, шар касается оснований цилиндра и боковой поверхности цилиндра; центр шара - в середине отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра 

Все согласны? Какая существует связь между радиусом и высотой цилиндра? Запишите результаты в таблицу.

**Слайд 8**

**Учитель.** Ситуация 2. Теперь шар, описанный около цилиндра. У кого на парте эта комбинация и какой выбор вы сделали?

**Ученики** выбирают и обосновывают свой выбор. 2 пара: 3-й рисунок, окружности оснований цилиндра лежат на сфере (поверхности шара); центр шара - в середине отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра.

Все согласны? Какие можно сделать дополнения?

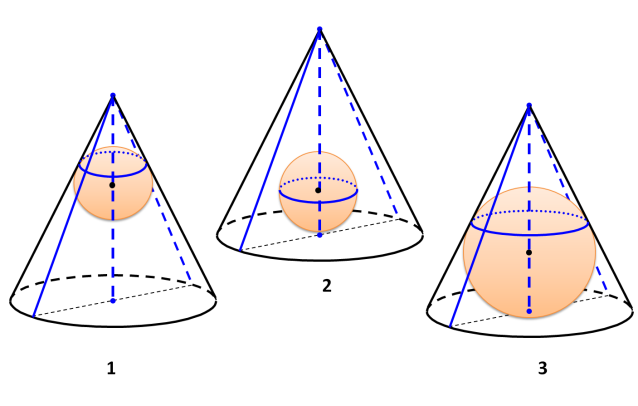
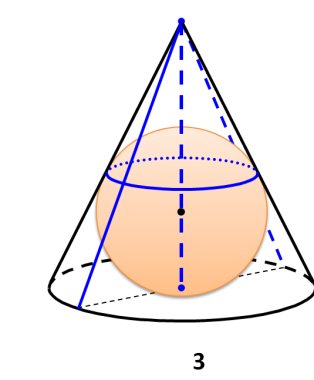
**Слайд 9. Важно!!! ЕГЭ**

**Обобщение.** В цилиндр можно вписать шар, если высота цилиндра равна диаметру его основания. Радиус сферы будет равен радиусу окружности основания цилиндра. Около цилиндра всегда можно описать шар, т.к. всегда можно. описать окружность вокруг прямоугольника.

**Слайд 10**

**Учитель.** Ситуация 3. Кто работал с шаром и конусом, вписанным в конус? Какую из комбинаций вы выбрали и почему?

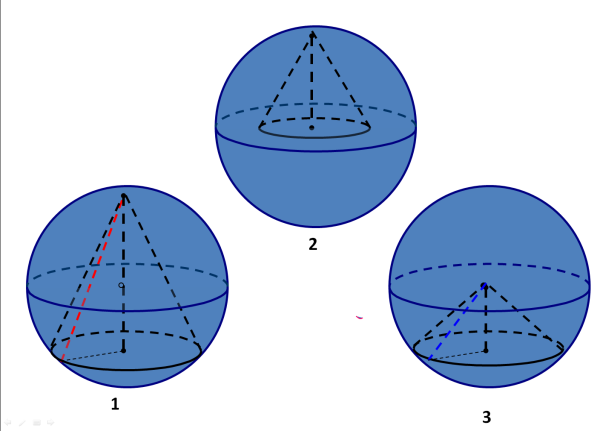
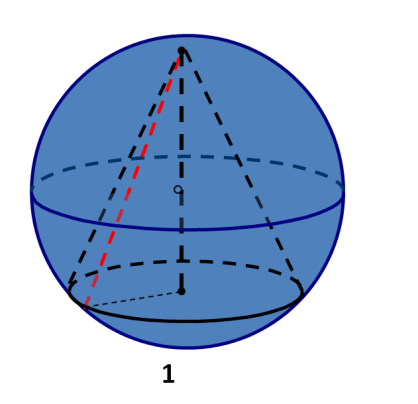
**Ученики** выбирают и обосновывают свой выбор. 3-я пара: 3-й рисунок - поверхность шара касается основания и боковой поверхности конуса. **Центр вписанного в конус шара совпадает с точкой пересечения высоты конуса с биссектрисой угла между любой образующей и плоскостью основания.**

**Слайд 11**

**Учитель.** Ситуация4. Кто работал со сферой описанной около конуса.

**Ученики** выбирают и обосновывают свой выбор. 4-я пара: 1-й рисунок - окружность основания и вершина конуса лежат на сфере. Центр сферы лежит на высоте конуса, в центре окружности, описанной около сечения конуса.

Все согласны? Какие можно сделать дополнения?

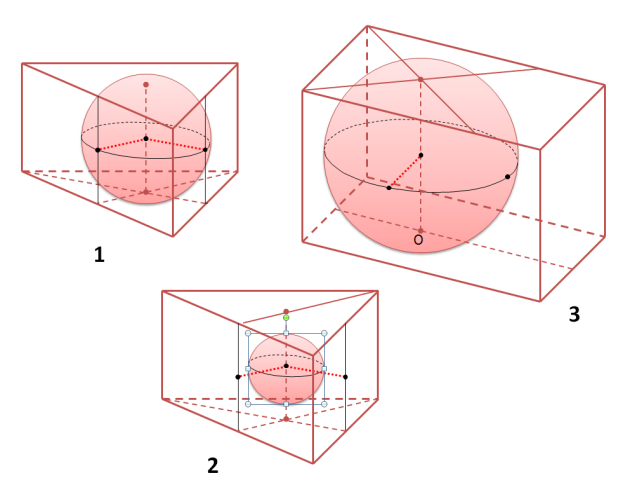
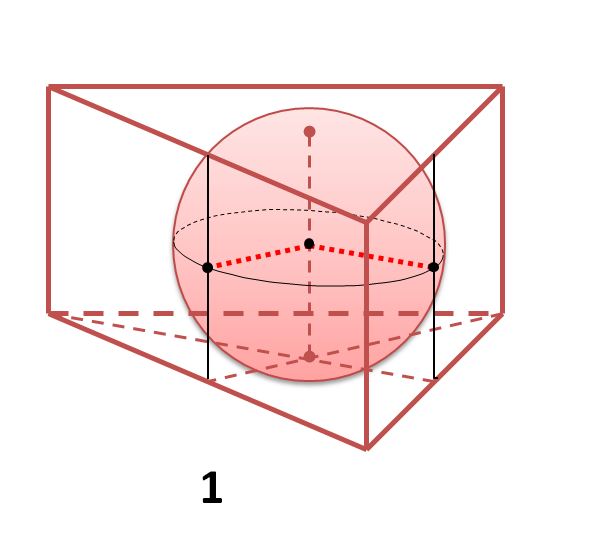
**Слайд 12. Важно!!! ЕГЭ**

**Обобщение.** В любой конус (прямой, круговой) можно вписать шар. Ее центр находится на высоте конуса, а радиус равен радиусу окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса. Около любого конуса можно описать шар. Ее центр находится на высоте конуса, а радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника, являющимся осевым сечением конуса.

**Слайд 13**

**Учитель**. Ситуация 5. Следующая комбинация - сфера, вписанная в призму.

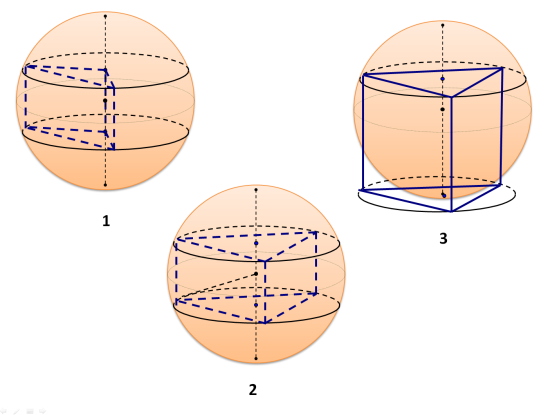
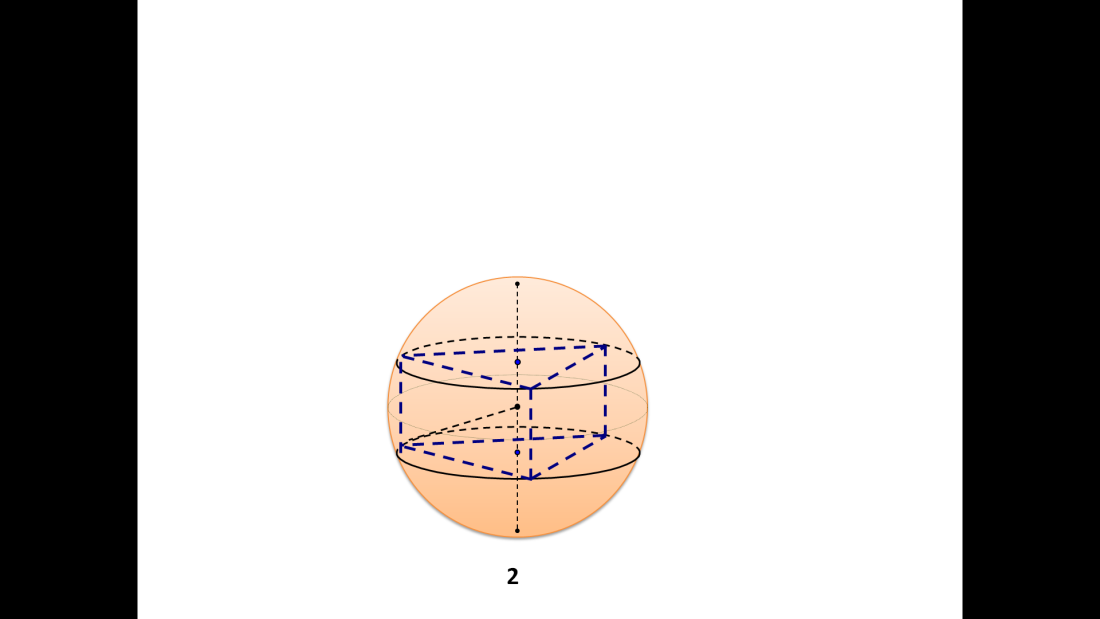
**Ученики** выбирают и обосновывают свой выбор. 5-я пара: 1-й рисунок, сфера касается всех граней призмы; центр вписанного шара лежит на середине высоты прямой призмы, проходящей через центр окружности, вписанной в основание.

**Слайд 14**

**Учитель**. Ситуация 6. Сфера, описанная около призмы

6-я пара: 2-й рисунок, все вершины призмы лежат на поверхности шара; центр шара, описанного около прямой призмы, лежит на середине высоты призмы, проведенной через центр окружности, описанной около основания

Все согласны? Какие можно сделать дополнения?

**Слайд 15. Важно!!! ЕГЭ**

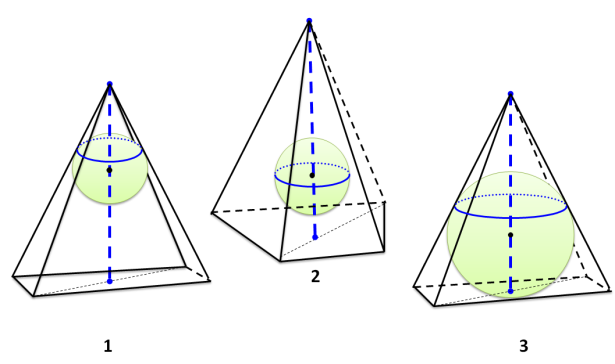
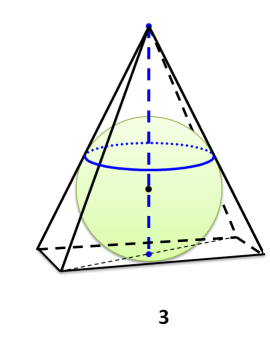
**Обобщение.** Радиус шара, вписанного в прямую призму равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы Высота прямой призмы равна диаметру шара.

Шар можно описать около призмы в том и только в том случае, если призма прямая и около ее основания можно описать окружность.

**Слайд 16**

**Учитель**. Ситуация 7. Следующая ситуация - сфера, вписанная в пирамиду.

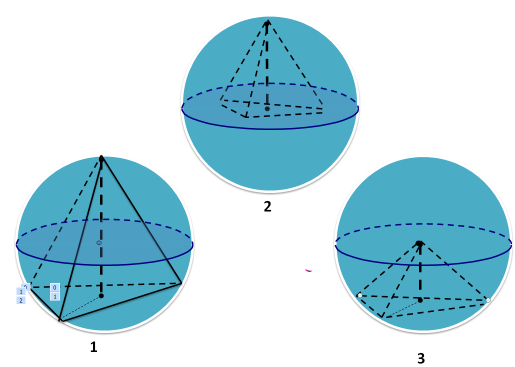
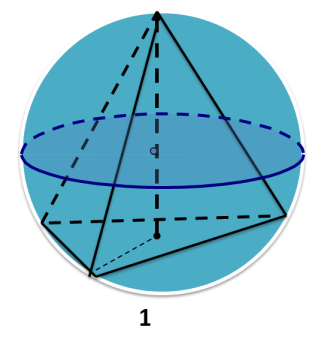
**Ученики** выбирают и обосновывают свой выбор. 7-я пара: 3-й рисунок, сфера касается всех граней пирамиды; центром шара является точка пересечения высоты пирамиды с биссектрисой угла, образованного апофемой и проекцией на основание, если мы рассматриваем правильную пирамиду.

**Слайд 17**

**Учитель**. Ситуация 8. Сфера, описанная около пирамиды.

**Ученики** выбирают и обосновывают свой выбор. 8-я пара: 1-й рисунок, вершины пирамиды лежат на сфере; центр шара, описанного около многогранника, лежит в точке пересечения плоскостей, перпендикулярных ко всем ребрам многогранника и проходящих через их середины.

**Слайд 18. Важно!!! ЕГЭ**

**Обобщение.** Около треугольной пирамиды можно описать шар. Если около основания пирамиды можно описать окружность, то около пирамиды можно описать шар. Около любой правильной пирамиды можно описать шар***.*** Центр произвольной пирамиды может находится внутри, на поверхности и вне многогранника

**Физкультминутка (1-2 мин)**

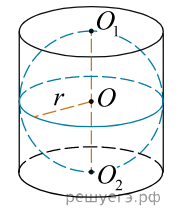
* **Раскрашивание.**  предлагает учащимся закрыть глаза и представить перед собой геометрические тела. Можно вписать или описать окружность и раскрасить их поочерёдно любым цветом, выполняя движения глаз: например, сначала жёлтым, потом оранжевым, зелёным, синим, но закончить раскрашивание нужно самым любимым цветом.
* **Ухо-нос.** Одну ладонь поставить на нос, а вторую, перекрестив с левой, -поднести к уху. Хлопнуть в ладоши и поменять руки местами. Повторить несколько раз. (помогает улучшить память, внимание, концентрацию)

**V. Первичное закрепление нового материала (7 мин)**

На сайте Решу ЕГЭ (профильный уровень), решить прототип 3 задания

<https://math-ege.sdamgia.ru>

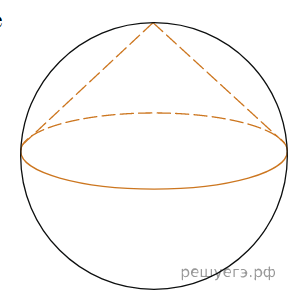
№ [5077](https://ege.sdamgia.ru/problem?id=5077). Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара.

Решение. Радиусы шара и основания цилиндра равны. Площадь поверхности цилиндра радиусом основания *r* и высотой 2*r* равна S = 2Sосн + Sбок = 2πr2 +2πrh = 2πr2 +2πr∙ 2r = 6πr2. Площадь поверхности шара радиуса *r*

равна 4πr2,она в 1,5 раза меньше площади поверхности цилиндра. Следовательно, площадь поверхности шара равна 12.

Ответ: 12

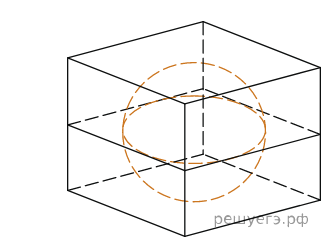
№ [245351](https://ege.sdamgia.ru/problem?id=245351) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара.

Объем шара равен 28. Найдите объем конуса.

Решение. Vшара = πR3 = 28. Vконуса = Sосн∙∙h = πR2 ∙ h = Vшара = = 7

Ответ: 7

№  [27105](https://ege.sdamgia.ru/problem?id=27105) Объём куба, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.

 Решение. Прямоугольный параллелепипед, описанный вокруг сферы, является кубом. Тогда длина его ребра a = = 6. Радиус сферы равен половине длины ребра a = 3.

Ответ: 3

**VI. Первичная проверка понимания нового материала (7 мин)**

**Тест (**решение теста на компьютерах с автоматической проверкой ответа или можно выполнить на листочках с проверкой учителя).Данный тест может выполнять как весь класс так и отдельная группа класса

**Вариант 1**

1. Объём куба, описанного около сферы, равен 1728. Найдите радиус сферы. (6)

2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда. (4)

3. Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 102. Найдите объем шара. (68)

4. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 112. Найдите объём конуса. (28)

5. Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 69. Найдите площадь поверхности шара. (46)

**Вариант 2**

1. Объём куба, описанного около сферы, равен 10648. Найдите радиус сферы. (11)

2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра. (0,25)

3. Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 38. Найдите объем цилиндра. (57)

4. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна 83Найдите радиус сферы. (83)

5. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите площадь полной поверхности цилиндра. (166,5)

**Резервное задание.** При условии, что тест выполняется не полным классом, можно предложить более сильным учащимся решить одну из задач на выбор с обзорной проверкой по результатам решения

**Задача 1.** В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара

**Задача 2.** Площадь поверхности сферы, вписанной в конус, равна 100π. Длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна 6π. Найдите радиус основания конуса.

**VII. Подведение итогов урока проверкой знания и понимания изученной темы (фронтальный опрос). Оценка ответов учащихся (3 мин)**

* Справедливо ли утверждение, что около любой треугольной пирамиды можно описать сферу? *(Да)*
* Можно ли описать сферу около четырехугольной пирамиды, в основании которой лежит ромб, не являющийся квадратом? *(Не*т)
* Можно ли описать сферу около прямоугольного параллелепипеда? Если да, то где находится его центр*? (Да, в точке пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда)*
* Можно ли описать сферу около наклонной призмы? *(Нет, нельзя)*
* Какими свойствами должна обладать пирамида, чтобы около нее можно было описать сферу? *(В её основании должен лежать многоугольник, около которого можно описать окружность)*
* Около треугольной призмы описана сфера, центр которой лежит вне призмы. Какой треугольник является основанием призмы? *(Тупоугольный треугольник)*
* Около треугольной призмы описана сфера, центр которой лежит на одной из сторон основания. Какой треугольник является основанием призмы? *(Прямоугольный треугольник)*
* Во всякий ли цилиндр можно вписать сферу? Какими свойствами должен обладать цилиндр, чтобы в него можно было вписать сферу? *(Нет, не во всякий: осевое сечение цилиндра должно быть квадратом)*
* Во всякий ли конус можно вписать сферу? Как определить положение центра сферы, вписанной в конус? *(Да, во всякий. Центр вписанной сферы находится на пересечении высоты конуса и биссектрисы угла наклона образующей к плоскости основания)*

**VIII. Постановка домашнего задания (1мин)**

Домашнее задание можно предложить выполнить по вариантам. Составить конспект по вопросу соотношения между элементами для треугольной и четырехугольной пирамид по отношению к вписанной и описанной сферы, а так же для призмы с треугольным и четырехугольным основанием. Можно разделить данные вопросы на большее количество вариантов.

**1 вариант**

1. Выведите соотношения между R, Rосн., rосн. и H, Vшара, Vпирамидыдля шара описанного около правильной треугольной пирамиды.

2. Выведите соотношения между R, Rосн., rосн. и H, Vшара, Vпирамидыдля шара вписанного в правильную треугольную пирамиду.

3. Выведите соотношения между R, Rосн., rосн. и H, Vшара, Vпирамидыдля шара описанного около правильной четырехугольной призмы.

4. Выведите соотношения между R, Rосн., rосн. и H, Vшара, Vпирамидыдля шара вписанного в правильную четырехугольную пирамиду.

**2 вариант**

1. Выведите соотношения между R, Rосн., rосн. и H, Vшара, Vпризмыдля шара описанного около правильной треугольной призмы.

2. Выведите соотношения между R, Rосн., rосн. и H, Vшара, Vпризмыдля шара вписанного в правильную треугольную призму.

3. Выведите соотношения между R, Rосн., rосн. и H, Vшара, Vпризмыдля шара описанного около правильной четырехугольной призмы.

4. Выведите соотношения между R, Rосн., rосн. и H, Vшара, Vпризмыдля шара вписанного в правильную четырехугольную призму

**Рефлексия ( 2 мин)**

Предложите детям **облако «тегов»,** которые необходимо дополнить. Например, на интерактивной доске можно вывести слайд, где указаны варианты:

* сегодня я узнал...
* было трудно…
* я понял, что…
* я научился…
* я смог…
* было интересно узнать, что…
* меня удивило…
* мне захотелось… и т.д.

Каждый ученик выбирает по 1-2 предложения и заканчивает их. Провести такую рефлексию можно устно, а можно и письменно (на листочках или прямо в тетради).

**Используемая литература**

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия:10-11 классы: базовый и углубленный уровни: учебник /Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев [и др.].- 11-е изд., стер. - Москва: Просвещение, 2023. - 287с.
2. Решу ЕГЭ. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://ege.sdamgia.ru](https://ege.sdamgia.ru/) – (дата обращения:14.05.2024).