

Областное государственное автономное
профессиональное образовательное учреждение
«Алексеевский агротехнический техникум»

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ
по теме
***«Логарифмы. Свойства
логарифмов»***

Дисциплина: Математика

Составитель: Попова Наталья Владимировна, преподаватель ОГ АПОУ
«Алексеевский агротехнический техникум»

Введение

Данная рабочая тетрадь может использоваться как самостоятельно (так как в тетрадь включены не только множество заданий разной степени сложности, но и все необходимые определения, подробные примеры и пояснения к ним), так и совместно с учебниками:

- «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;
- «Алгебра и начала анализа 10класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника. Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме. В заключении предложено выполнить несколько тренировочных тестов по форме ЕГЭ (задания В3,В7).

В данной рабочей тетради использованы различные формы изложения материала. Для изучения нового материала рабочие тетради оформлены как полноценный конспект, в котором есть и теория, и примеры решённых заданий, и задания для самостоятельного выполнения. Учебные пособия - рабочие тетради, разработаны так, что по алгоритму и количественной части решённого, а также с учетом возрастания сложности необходимо выполнить задание. При выполнении данных заданий требуются умения систематизировать, сравнивать, анализировать предложенную информацию, применять имеющиеся знания и умения в нестандартной ситуации. Причём информация представлена в различных видах (схемы, таблицы и тд.). Задание так же имеют разную формулировку и различны по своему характеру: вводные, пробные, по образцу, творческие. Помимо упражнений и заданий в тетради включены и справочные материалы.

Определение логарифма, свойства логарифмов

Историческая справка

Принцип, лежащий в основе любой системы логарифмов, известен очень давно и может быть прослежен в глубь истории вплоть до древневавилонской математики (около 2000 до н.э.). В те времена интерполяция между табличными значениями целых положительных степеней целых чисел использовалась для вычисления сложных процентов. Гораздо позже Архимед (287-212 до н.э.) воспользовался степенями числа 108 для нахождения верхнего предела числа песчинок, необходимого для того, чтобы целиком заполнить известную в те времена Вселенную. Архимед обратил внимание на свойство показателей степеней, лежащее в основе эффективности логарифмов: произведение степеней соответствует сумме показателей степеней.

В конце Средних веков и начале Нового времени математики все чаще стали обращаться к соотношению между геометрической и арифметической прогрессиями. М. Штифель в своем сочинении Арифметика целых чисел (1544) привел таблицу положительных и отрицательных степеней числа 2. Штифель заметил, что сумма двух чисел в первой строке (строке показателей степени) равна показателю степени двойки, отвечающему произведению двух соответствующих чисел в нижней строке (строке степеней). В связи с этой таблицей Штифель сформулировал четыре правила, эквивалентных четырем современным правилам операций над показателями степеней или четырем правилам действий над логарифмами: сумма в верхней строке соответствует произведению в нижней строке; вычитание в верхней строке соответствует делению в нижней строке; умножение в верхней строке соответствует возведению в степень в нижней строке; деление в верхней строке соответствует извлечению корня в нижней строке. По-видимому, правила, аналогичные правилам Штифеля, привели Дж. Непера к формальному введению первой системы логарифмов в сочинении Описание удивительной таблицы логарифмов, опубликованном в 1614. Независимо от Непера и почти одновременно с ним система логарифмов, довольно близкая по типу, была изобретена и опубликована Й.Бюрги в Праге, издавшем в 1620 Таблицы арифметической и геометрической прогрессий. В системе Непера логарифм числа 10^7 был принят за нуль, и по мере уменьшения чисел логарифмы возрастали. Когда Г. Бриггс (1561-1631) навестил Непера, оба согласились, что было бы удобнее использовать в качестве основания число 10 и считать логарифм единицы равным нулю. Тогда с увеличением чисел их логарифмы возрастали бы. Таким образом мы получили современную систему десятичных логарифмов, таблицу которых Бриггс опубликовал в своем сочинении Логарифмическая арифметика (1620). Логарифмы по основанию e , хотя и не совсем те, которые были введены Непером, часто называют неперовыми. Термины "характеристика" и "мантисса" были предложены Бриггсом. Первые логарифмы в силу исторических причин использовали приближения к числам $1/e$ и e .

Определение логарифма

Определение: Логарифмом числа x по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить число x .

Определение: Действие нахождения логарифма числа называют логарифмированием.

Обозначение: $\log_a x$ (логарифм числа x по основанию a)
 a - основание логарифма

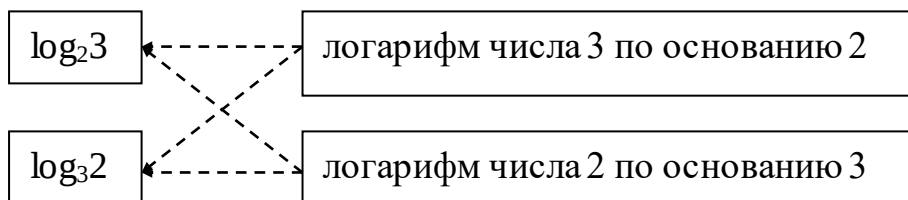
Задание 1: Прочитать:

$$\log_2 4, \log_3 81, \log \frac{1}{2} \frac{1}{512}, \log_{16} 64, \log_7 7, \log_5 1$$

Задание 2: Записать:

- 1) логарифм числа 8 по основанию 2;
- 2) логарифм числа 5 по основанию 5;
- 3) логарифм числа $\frac{1}{49}$ по основанию 7

Задание 3: Сопоставить:



Определение: $\log_a x = b$, то $x = a^b$

степень	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
число												
2	1/4	1/2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	1/9	1/3	3	9	27	81	243	729	2187			
4	1/16	1/4	4	16	64	256	512	1024				
5	1/25	1/5	5	25	125	625	3125					
6	1/36	1/6	6	36	216	1296						
7	1/49	1/7	7	49	343							
8	1/64	1/8	8	64	512							
9	1/81	1/9	9	81	729							

Пример: Вычислить:

- $\log_2 8 = 3$, т.к. $2^3 = 8$ (см. таблицу)
- $\log_2 32 = 5$, т.к. $2^5 = 32$
- $\log_2 \frac{1}{32} = -5$, т.к. $2^{-5} = \frac{1}{32}$

Задание 4: Вычислить:

1) $\log_7 343 = 3$, т.к. $7^{\dots} = 343$

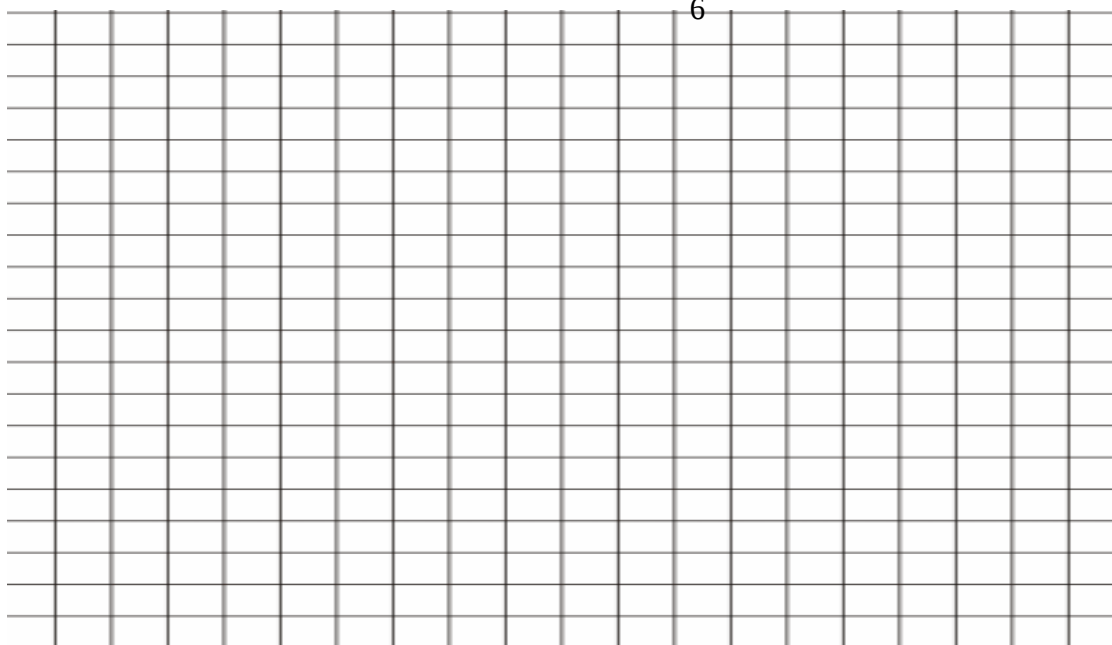
3) $\log_2 \frac{1}{128}$

5) $\log_3 81$

2) $\log_5 25 = \dots$, т.к. $5^{\dots} = 25$

4) $\log \frac{1}{6} 216$

6) $\log_4 64$

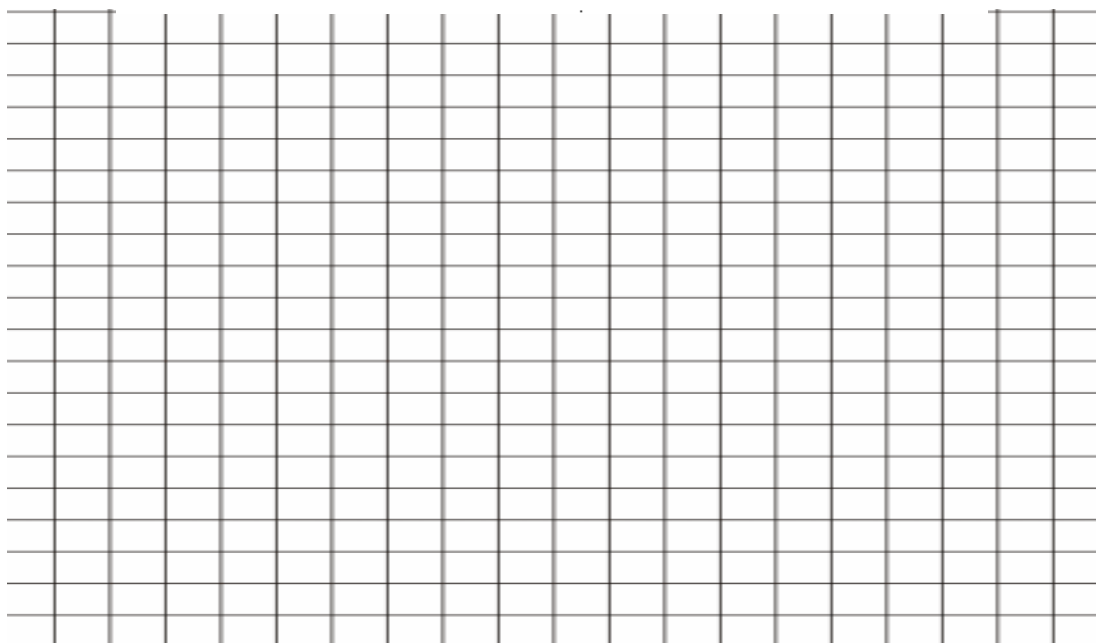


Задание 5: Найдите x

$\log_3 x = 3$; $\log_5 x = -1$; $\log_4 x = -2$; $\log_{0.1} x = -2$.

а) $\log_x 16 = 2$;

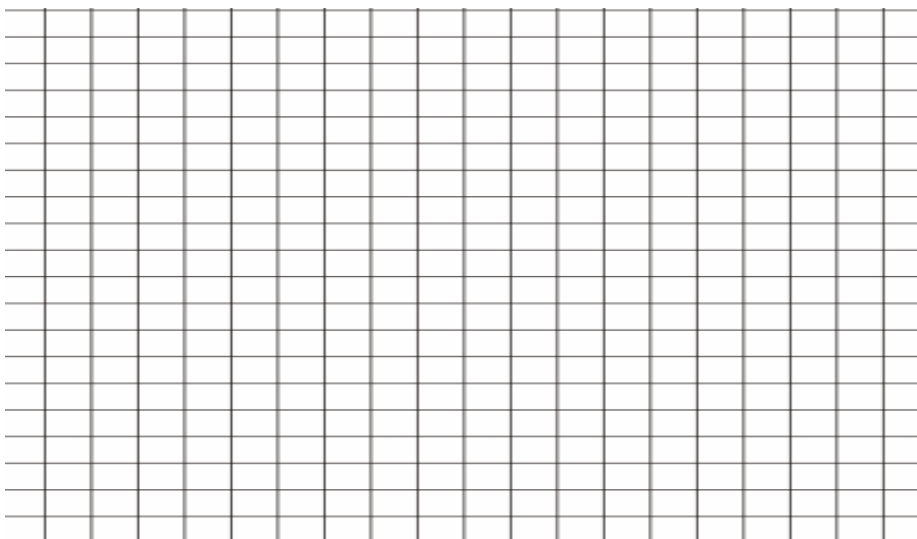
б) $\log_x 81 = 4$.



Задание 6: Найдите значение выражения:

а) $\log_3 (3 \log_3 8)$;

б) $\log_2 (8 \log_2 4)$.



Основные свойства:

- 1) $\log_a a = 1$
- 2) $\log_a 1 = 0$
- 3) $a^{\log_a x} = x$ ($x > 0, a > 0, a \neq 1$, основное логарифмическое тождество)

Задание 7: Заполнить таблицу:

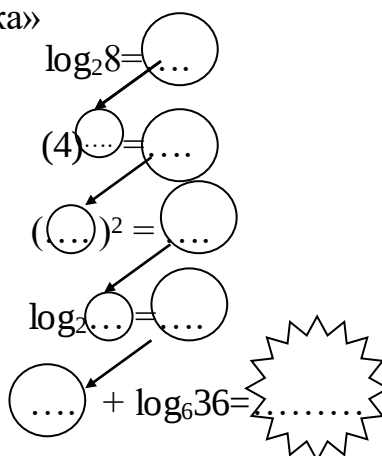
№	пример	свойство	ответ
1	$\log_7 7$	1)	1
2	$\log_5 1$	2)	
3	$12^{\log_{12} 5}$	3)	
4	$\log_3 3$		
5	$8^{\log_8 4}$		
6	$\log_{23} 1$		

Задание 8: Решить пример, выбрать букву, которая совпадает с правильным ответом и номером задания и получить слово:

№	М	Е	Ц	О	Л	К	Д
1	1	2	3	4	5	6	7
2	8	9	10	11	12	13	14
3	15	16	17	18	19	20	21
4	22	23	24	25	26	27	28
5	29	30	31	32	33	34	35
6	36	37	38	39	40	41	42
7	43	44	45	46	47	48	49

- 1) $\log_{11} 11 + \log_{11} 1$
- 2) $4^3 - 7^2 - 2^2$
- 3) $57:3$
- 4) $\log_5 \dots = 2$
- 5) $\log_8 64 + \log_2 1024 + 23$
- 6) $18,5 \cdot 2$
- 7) $3 \cdot 105:7$

Задание 9: «Магическая цепочка»



Задание 10:

Вычислите с помощью тождества $a^{\log_a b} = b$:

а) $2^{\log_2 4}$, $10^{\lg 100}$;

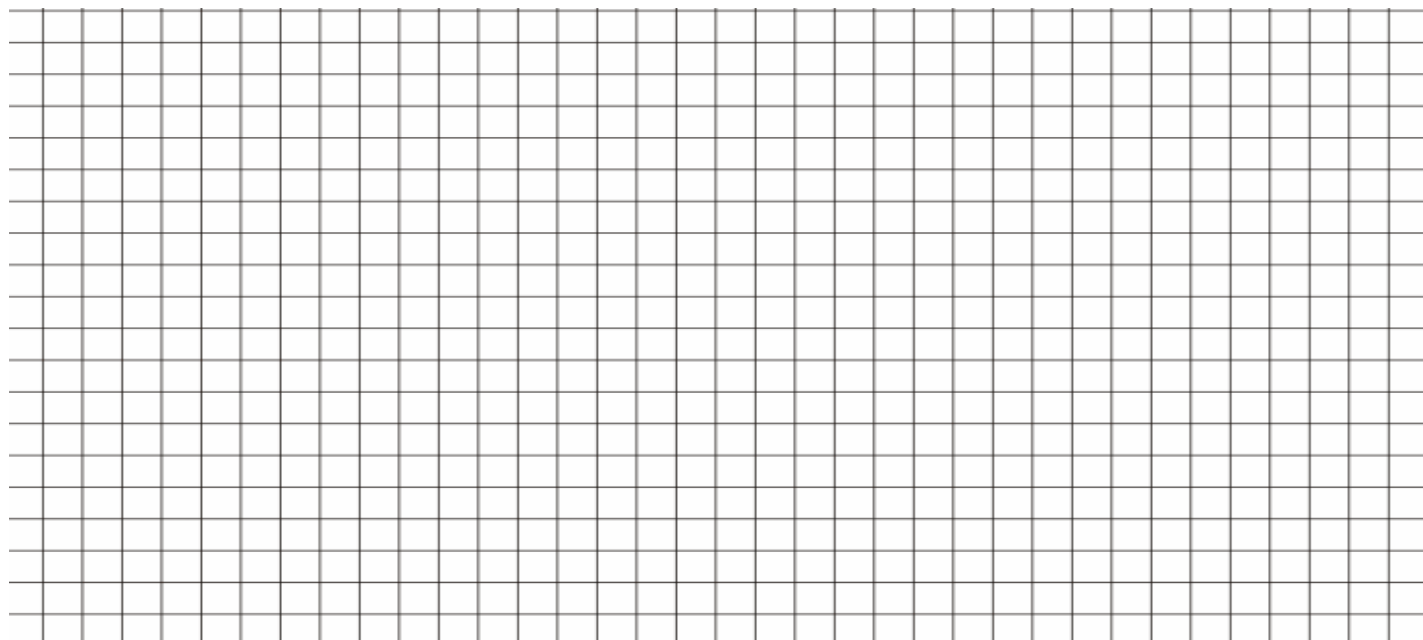
б) $3^{-\log_3 3}$, $(2^{\log_2 5})^2$;

в) $4^{\log_2 3}$, $25^{-\log_5 10}$.

Вычислите:

а) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$;

б) $\log_3 \log_3 \log_3 27$.



Действия с логарифмами

Теорема: Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, p - любое действительное число.

Тогда справедливы формулы:

логарифм произведения: $\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$, $c > 0$, $c \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$

логарифм частного: $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$, $c > 0$, $c \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$

логарифм степени: $\log_c a^k = k \cdot \log_c a$, $c > 0$, $c \neq 1$, $a > 0$

логарифм корня: $\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_c a$, $c > 0$, $c \neq 1$, $a > 0$

переход к новому основанию: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $a > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$

Дополнительные формулы: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$$

$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$$

$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$$

$$\log_{a^m} b^m = \log_a b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

Пример: Вычислить:

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 (18 \cdot 2) = \log_6 36 = 2$

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$

Задание 1: Дорешать, используя формулы:

1) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12} (2 \cdot 72) = \log_{12} \dots = \dots$	
2) $\log_{\frac{1}{5}} 75 - \log_{\frac{1}{5}} 3 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{75}{3}\right) = \dots$	
3) $\log_2 12 - \log_2 15 + \log_2 20 = \log_2 \left(\frac{12}{15} \cdot \dots\right) = \dots$	

Задание 2: Вычислить:

1) $\log_3 54 - \log_3 2 =$	
2) $\log_{14} 7 + \log_{14} 2 =$	
3) $\log_3 15 + \log_3 18 - \log_3 10 =$	
4) $\log_4 10 + \log_4 8 - \log_4 5 =$	

Задание 3: Заполнить таблицу:

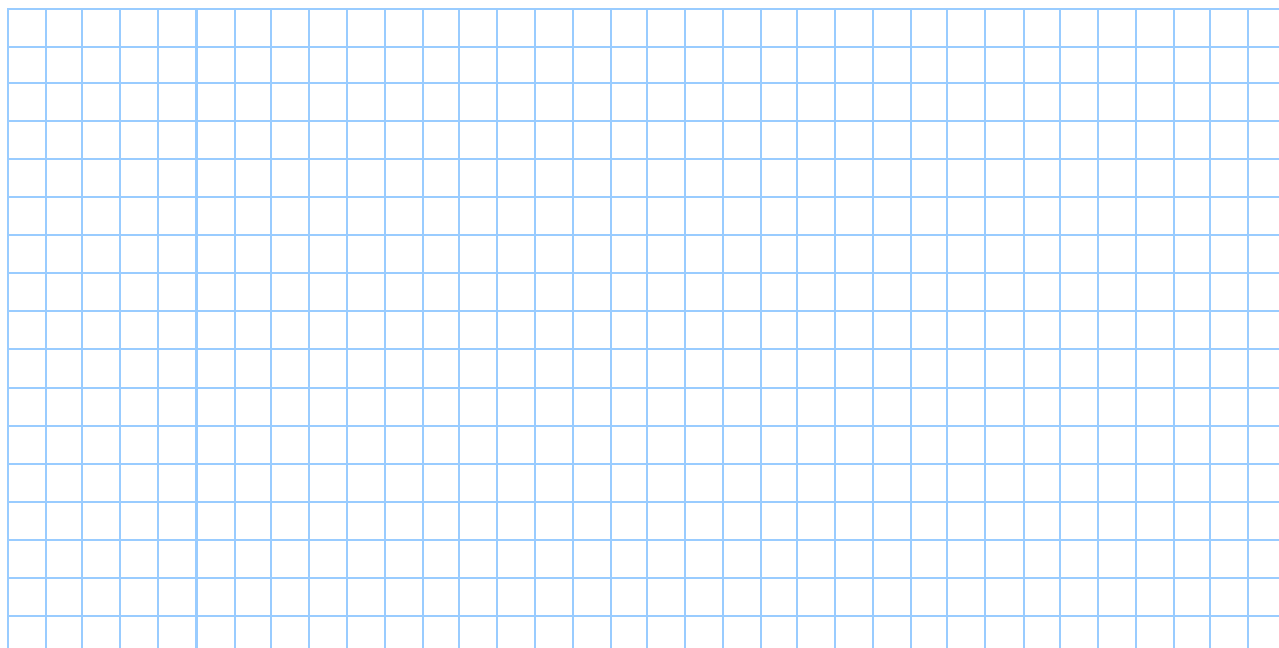
№	пример	упростить
1	$3 \log_5 a + 6 \log_5 b - 2 \log_5 c$	$\log_5 \left(\frac{a^3 \cdot b^6}{c^2} \right)$
2	$4 \log_5 a - 5 \log_5 b + 7 \log_5 c$	
3	$\log_5 b + 8 \log_5 c + 2 \log_5 a$	
4	$2 \log_5 c - 2 \log_5 a - \log_5 b$	

Самостоятельная работа

Базовый уровень:

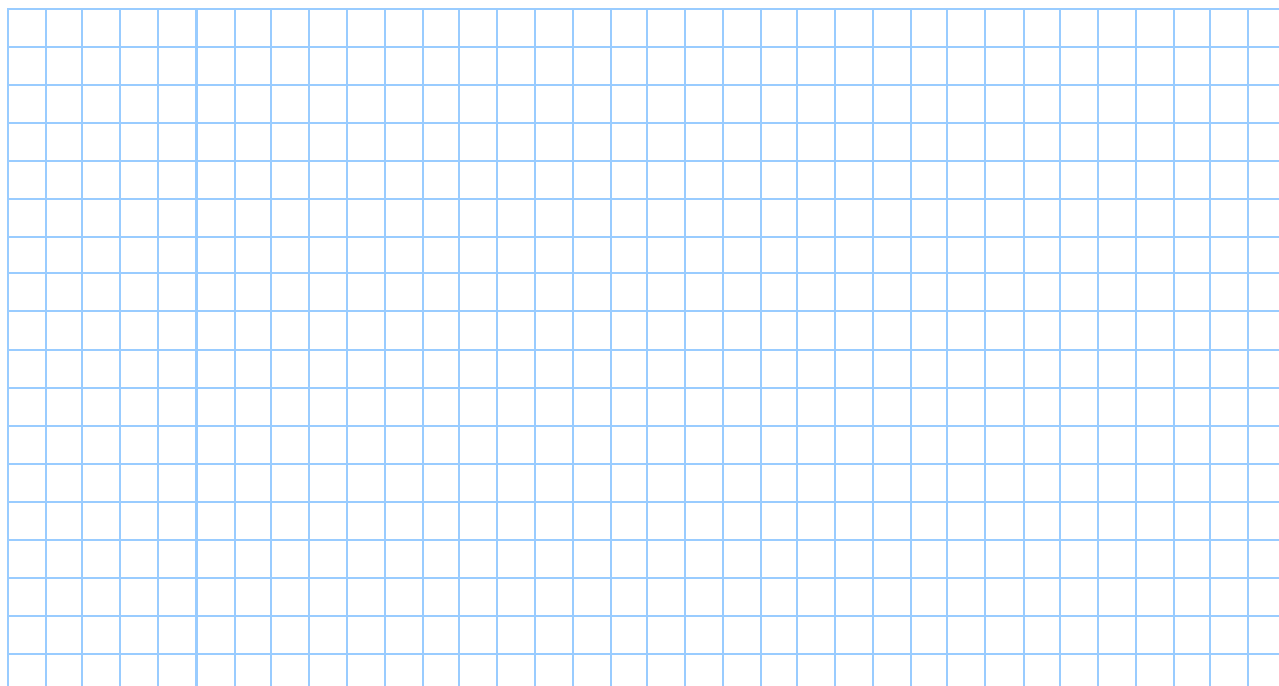
№1. Вычислить: 1) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; 2) $\log_{-5} \frac{1}{25}$; 3) $\log_{-2} \frac{1}{8}$; 4) $\log_{12} 1$;

5) $\lg 100000$; 6) $\log_{\frac{1}{8}} 64$; 7) $\log_3 \frac{1}{81}$; 8) $\log_{\frac{1}{5}} 625$



№2. Вычислить: 1) $\log_2 2 - \log_2 16$; 2) $\log_3 \frac{1}{8} + \log_3 8$; 3) $\log_5 7 - \log_5 \frac{7}{25}$;

4) $\lg 14 - \lg 140$; 5) $\log_4 32 - \log_4 2$; 6) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$; 7) $\log_2 11 - \log_2 22$



Повышенный уровень сложности:

№1. Вычислить:

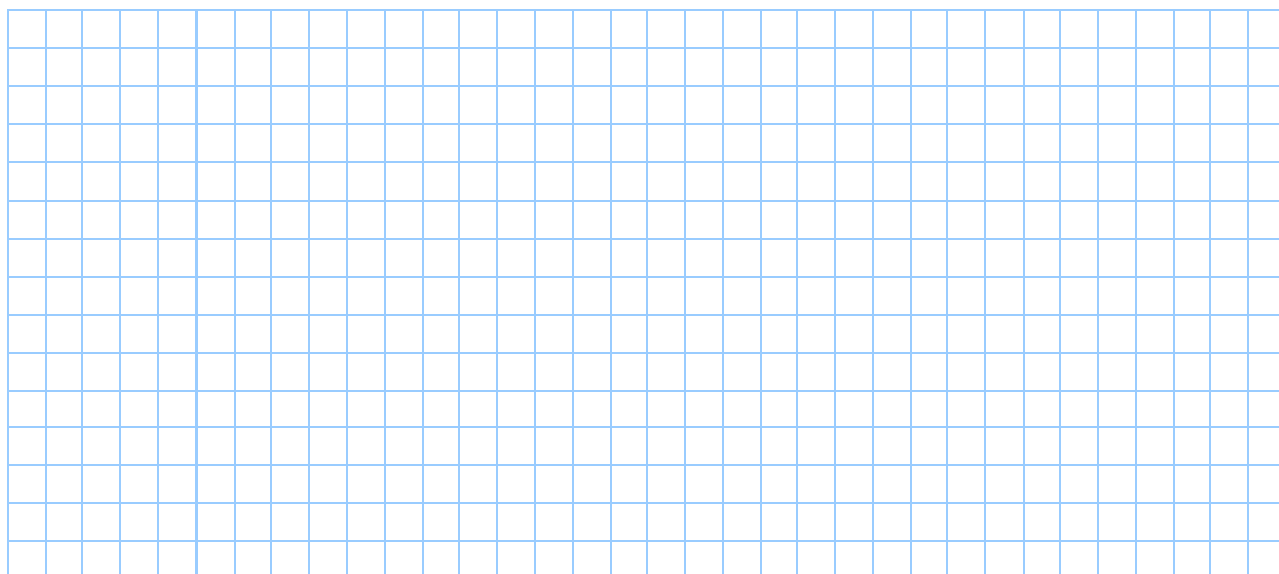
1. $2^{\log_2 3} + \log_7 2 - \log_7 17 =$

2. $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \cdot \lg 2 + \lg 3} =$

3. $\lg 2a + \lg 5b$, если $\lg ab = 3$

4. $6\log_2 125 \log_5 2 + 2^{\lg 7} 5^{\lg 7} =$

5. $\frac{\log_7 21}{\log_{21} 7} - \frac{\log_7 147}{\log_3 7} =$





№2. Решить уравнение:

1) $\log_5 x = 2 \log_5 3 + 4 \log_{25} 2;$

2) $\log_5 x = 2 \log_5 3 + \frac{1}{2} \log_5 49 - \frac{1}{3} \log_5 27.$

3) $\log_2 x - 2 \log_{\frac{1}{2}} x = 9;$

4) $\log_7 x = 2 \log_7 5 + \frac{1}{2} \log_7 36 - \frac{1}{3} \log_7 125.$

5) $\log_3 x = 9 \log_{27} 8 - 3 \log_3 4;$



№3. Вычислить:

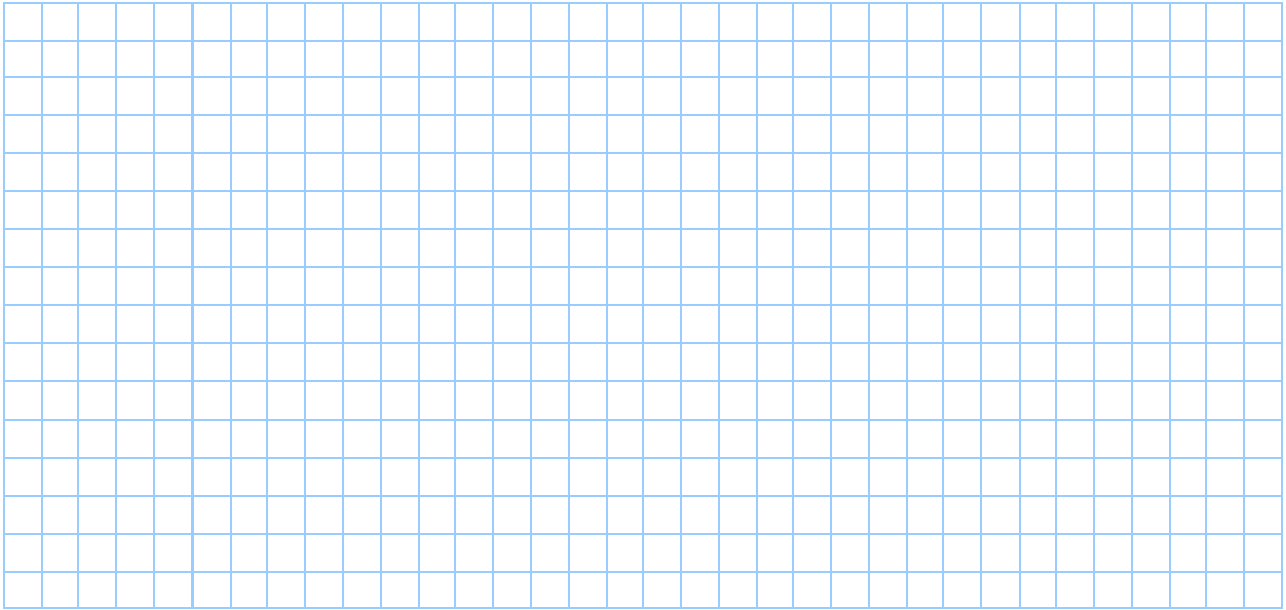
1. $\log_3 27 - \log_2 16 =$

2. $\log_4 48 - \log_4 3 + 3 =$

3. $\log_2 7 \cdot \log_7 2 + 3 =$

4. $3^{2 \log_3 5} =$

5. $9^{\log_9 2} \cdot \log_5 25 =$



Проверь себя!

Задание 1: Дано $\log_7 2 = m$. Найти $\log_{49} 28$

Задание 2. Вычислить

1) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16}$

2) $16^{1+\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}$

3) $2\log_{25} 30 + \log_{\frac{1}{2}} 6$

4) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$



Тренировочная работа №2

Задание В7: Найти значение выражения

[illegible]

Тренировочная работа №3

Задание В7: Найти значение выражения

[illegible]