Теорема о трех перпендикулярах и ее применение к решению задач.

Цель работы: сформировать умение применять теорему о трех перпендикулярах при решении простейших стереометрических задач.

Выполнив данную работу, Вы будете:

знать:

– теорему о трех перпендикулярах и теорему обратную ей;

уметь:

– изображать на рисунках и конструировать на моделях перпендикуляры и наклонные к плоскости;

– решать задач на вычисление геометрических величин.

Дидактическое оснащение:

– указания по выполнению практического задания;

– рабочая тетрадь с конспектами;

– чертежные инструменты (набор линеек, простые карандаши);

Прежде чем приступить к выполнению заданий практической работы ответьте на вопросы входного контроля.

Входной контроль

Прочитайте каждое утверждение утверждения. Если утверждение верное, поставьте «+», иначе «-».

1. Если две прямые в пространстве перпендикулярны третьей, то они параллельны между собой.

2. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна лежащим в этой плоскости двум сторонам треугольника.

3. Если прямая *a* параллельна плоскости α и прямая *b* перпендикулярна прямой *a,* то прямая *b* перпендикулярна плоскости α.

4. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум сторонам квадрата, который принадлежит плоскости.

5. Если прямая *a* перпендикулярна плоскости α, а прямая *b* не перпендикулярна плоскости α, то *a* параллельна *b.*

6. Прямая перпендикулярна плоскости треугольника, если она перпендикулярна двум его сторонам.

7. Две стороны треугольника могут быть перпендикулярны одной плоскости одновременно.

8. Две стороны трапеции могут быть перпендикулярны одной плоскости одновременно.

9. Прямая, которая пересекает круг в центре и перпендикулярная его диаметру, перпендикулярна плоскости круга.

10. Прямая, которая пересекает круг в центре и перпендикулярна двум его радиусам (Не образующим диаметр), перпендикулярна плоскости круга.

Нормы оценивания

За каждый правильный ответ Вы получаете 1 балл. Максимальное количество баллов – 10. Если Вы набрали более 7 баллов, то можете переходить к изучению нового материала, в противном случае необходимо повторить материал предыдущих занятий, который Вами не освоен в достаточной мере.

Порядок выполнения практической работы

1. Прочитайте краткое изложение теории и ознакомьтесь с образцами решения типовых задач.

2. Ответьте на контрольные вопросы.

3. Выполните самостоятельно задания практического занятия.
4. Сравните полученные результаты с эталонами ответов.

Теорема о трёх перпендикулярах

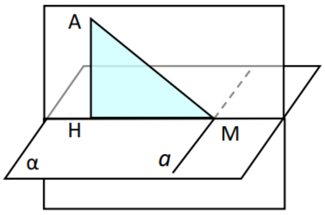


Рис. 1

AH – перпендикуляр (расстояние от точки A до плоскости α)
AM – наклонная.
HM – проекция наклонной AM.
$\angle A$ - угол между наклонной AM и перпендикуляром HM.
$\angle M$ - угол между наклонной AM и ее проекцией на плоскость (угол между наклонной и плоскостью).

Теорема о трех перпендикулярах. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной (рис. 1).

Символьная запись к теореме о трех перпендикулярах $a \perp HM \Rightarrow a \perp AM$

Справедлива также **обратная теорема:**

Теорема (обратная теорема о трех перпендикулярах). Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции (рис. 1).

Символьная запись к обратной теореме о трех перпендикулярах $a \perp AM \Rightarrow a \perp HM$

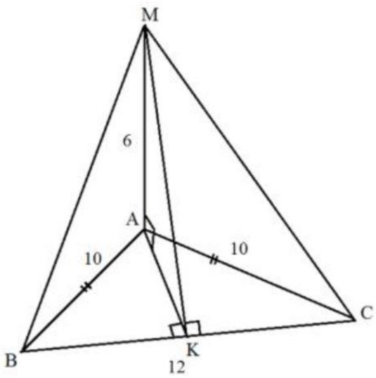
Решения типовых задач

Каждое действие решения геометрической задачи выполняется в несколько этапов:

1) рассматривается простейшая геометрическая фигура (определяется ее тип и объясняется ее описание);
2) выбирается способ (формула) вычисления неизвестной величины;
3) производятся вычисления (подстановки);
4) записывается ответ.

В случае если неизвестное не удалось найти за эти 4 этапа, действия нумеруются и выполняются до конечного ответа.

Задача 1. Отрезок AM перпендикулярен плоскости треугольника ABC и имеет длину 6 см. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, если AB = AC = 10см, BC=12 см.



Дано: Δ ABC - равнобедренный, т.к. AB = AC = 10 см

AM – перпендикуляр, $AM \perp (ABC)$, AM = 6 см

BC = 12см.

Найти: MK.

Решение.

1) Рассмотрим Δ МАК - прямоугольный, т.к. АМ – перпендикуляр, $AM \perp (ABC)$.

МК – можно назвать наклонной к плоскости Δ МАК, а АК ее проекцией на эту плоскость.

По теореме Пифагора: $MK^2 = AM^2 + AK^2$, АМ= 6, **<u>АК = ?</u>**

2) Рассмотрим Δ АВС - равнобедренный, т.к. по условию АВ = АС = 10 см.

Определим чем является АК для Δ АВС. Так как по условию задачи МК – расстояние от точки М до прямой ВС (т.е. проводится перпендикулярно к этой прямой), то по обратной теореме о трех перпендикулярах:

если $MK \perp BC$, то $AK \perp BC \Rightarrow$ АК - высота в Δ АВС.

Так как ΔАВС – равнобедренный, то АК не только высота, но и медиана

$\Rightarrow BK = KC = \frac{12}{2} = 6.$

3) Рассмотрим Δ АКВ – прямоугольный (т.к. АК – высота)

АВ = 10 см (по условию), ВК = 6 (из 2 п. решения).

По теореме Пифагора: $AK^2 = AB^2 - BK^2$

$$AK^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

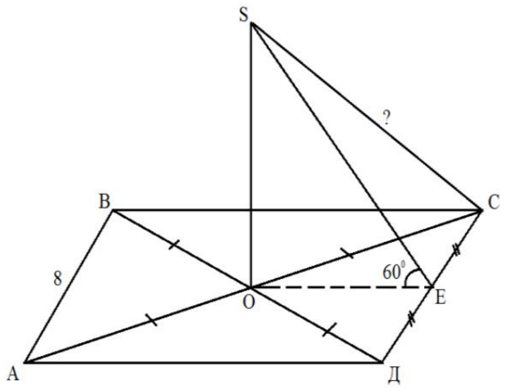
Т.к. $AK > 0$, то $AK = \sqrt{64} = 8$ см.

Вернемся в 1 п. решения: $MK^2 = AM^2 + AK^2$

$MK^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Т.к. $MK > 0$, то $MK = \sqrt{100} = 10$ см.

Ответ: 10 см



Задача 2. Из точки О пересечения диагоналей[1] квадрата АВСД к его плоскости проведен перпендикуляр SO и точка S соединена с серединой стороны ДС (рис. 2). Найдите длину отрезка SC, если АВ= 8 см, $\angle SEO = 60^0$.

Дано: АВСД – квадрат,

АС и ВД – диагонали квадрата,

О – точка пересечения диагоналей.

SO – перпендикуляр, $SO \perp (ABC)$.

Е – середина ДС (т.е. ДЕ = ЕС)

АВ= 8 см, $\angle SEO = 60^0$.

Найти: SC.

Решение.

1) Рассмотрим ΔАДС - прямоугольный, равнобедренный (т.к. по условию АВСД – квадрат, значит, АД=ДС=8, $\angle АДС = 90^0$). Так как АО = ОС (по свойству диагоналей квадрата) и ДЕ = ЕС (по условию задачи), то ОЕ – средняя линия Δ АДС $\Rightarrow OE = \frac{АД}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (по свойству средней линии треугольника[2]).

2) Рассмотрим ΔSOE - прямоугольный (т.к. по условию SO – перпендикуляр, $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp OE$). Так как по условию задачи $\angle SEO = 60^0$, то $\angle OSE = 180^0 - (90^0 - 60^0) = 30^0$. Так как катет, лежащий против этого угла равен половине гипотенузы, а гипотенуза в два раза больше этого катета, то получаем, что $SE = 2 \cdot OE = 2 \cdot 4 = 8$ см.

3) Рассмотрим ΔSEC и определим его тип:

Так как в равнобедренном ΔСОД (ОД = ОС по условию задачи) ОЕ является медианой (Е- середина стороны ДС по условию задачи), то ОЕ – высота[3], следовательно, $OE \perp СД$.

Так как для ΔSOE отрезок ОЕ – является проекцией наклонной SE на плоскость квадрата, то по теореме о трех перпендикулярах следует, что $СД \perp SE$, а, следовательно, ΔSEC – прямоугольный, в котором известно, что $EC = 4$ см (по условию задачи $ДЕ = EC = \frac{СД}{2} = \frac{8}{2} = 4$), SE = 8 см (из 2 пункта решения).

По теореме Пифагора $SC^2 = SE^2 + EC^2$

$SC^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80,\ т.к.\ SC > 0,\ то\ SC = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ см.

Ответ: $4\sqrt{5}$ см.

Контрольные вопросы

1. АВ – перпендикуляр к плоскости, АС – наклонная, ВС – её проекция на плоскость, CD – прямая на плоскости, перпендикулярная прямой ВС. Определите величину угла ACD.
2. АВ – перпендикуляр к плоскости, АС – наклонная, ВС – её проекция на плоскость, CD – прямая на плоскости, перпендикулярная прямой АС. Определите величину угла BCD.

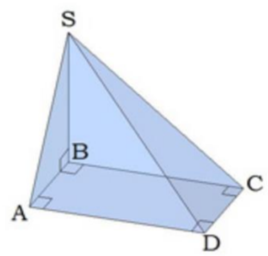


Рис. 2

3. Угол С треугольника АВС – прямой. AD – перпендикуляр к плоскости треугольника АВС. Определите тип Δ BCD.
4. Из вершины S к плоскости квадрата АВСД проведен перпендикуляр BS и наклонные SA, SC и SD (рис. 2). Назовите все прямоугольные треугольники с вершиной S. Ответ обоснуйте.
5. Из вершины А прямоугольного треугольника АВС (угол В – прямой) к плоскости треугольника проведен перпендикуляр АК. Определите взаимное расположение прямых КВ и ВС.

Нормы оценивания

За каждый правильный ответ Вы получаете 1 балл. Максимальное количество баллов 5. Если Вы набрали более 3 баллов, то можете переходить к самостоятельному решению следующих задач, в противном случае необходимо повторить материал темы, который Вами не освоен в достаточной мере.

[1] В квадрате точка пересечения диагоналей делит их пополам.
[2] Средняя линия треугольника равна половине его основания.

[3] В равнобедренном треугольнике медиана является и высотой, и биссектрисой.

Задания практической работы

Уровень А. Из точки М проведен перпендикуляр к плоскости прямоугольника АВСД (рис. 3). Найдите расстояние от М до сторон прямоугольника АВСД, если известно, что МВ = 6см, ВС = 8см, АВ = 4 см.

Уровень В. Найдите расстояние от точки М до стороны СВ прямоугольного треугольника АВС, если АМ = ВС= 5 см, АС = 13 см (рис. 4).

Уровень С. Из точки М проведен перпендикуляр к плоскости равнобедренного треугольника АВС. Найдите расстояние от М до стороны ВС, если АМ = 4 см, АВ =АС =5 см, ВС = 8 см (рис. 5).

Дополнительное задание

Задача. Из М проведен перпендикуляр к плоскости прямоугольника АВСД. Найдите расстояние от точки М до сторон прямоугольника АВСД, если АВ = 8 см, ВС = 6 см, ОМ = 6 см (рис. 6).

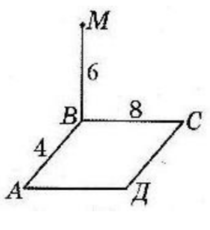


Рис. 3

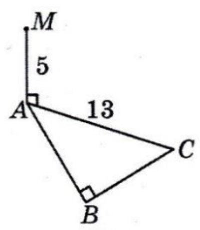


Рис. 4

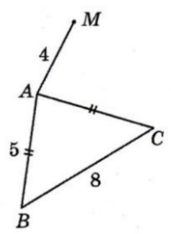


Рис. 5

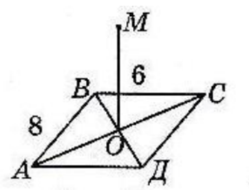


Рис. 6

Эталоны ответов

Ответы на вопросы входного контроля

1. +
2. +
3. -
4. -
5. -
6. +
7. -
8. +
9. -
10. +

Ответы на контрольные вопросы

1. 90^0.
2. 90^0.
3. Прямоугольный.
4. Δ SBA и ΔSBC прямоугольные, т.к. BS – перпендикуляр к плоскости; Δ SCD и ΔSAD прямоугольные (по теореме о трех перпендикулярах).
5. Прямые KB и BC взаимно перпендикулярны.

Ответы на задания практической работы

Уровень А. $10\text{см},\ 2\sqrt{13}\text{см}.$

Уровень В. 13см.

Уровень С. 5см.

Ответы на дополнительное задание

Задача. $3\sqrt{5}\text{см},\ 2\sqrt{13}\text{см}.$