ФОНД 21 ВЕКА

(Фонд образовательной и Научной Деятельности 21 века)

Всероссийский педагогический конкурс

«МОЯ ЛУЧШАЯ МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА»

Сефибеков Сефибек Рамазанович

ЭКСКУРСИЯ В ГЕОМЕТРИЮ. ДВЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

(Элективный курс)

Дагестан-Кашкент

2023

Элективный курс. 11 класс

Экскурсия в геометрию. Две исторические задачи

С.Р.Сефибеков, с. Кашкент, Хивский район, Республика Дагестан

В нашем изложении мы будем воспользоваться следующим приемом. Допустим, что мы должны доказать предложение: $A_n = B_n$ (1)

Перейдем равносильными преобразованиями к его следствию:

$$A_{n-1} = B_{n-1} \qquad (2)$$

$$A_{n-2} = B_{n-2} \qquad (3)$$

....

$$A_1 = B_1 \qquad (n)$$

Если следствие (n) верно, то верны и обратные переходы:

$$(n) \Leftrightarrow (n-1) \Leftrightarrow (n-2) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (1)$$

Этим приемом доказательства математического объекта следует воспользоваться, когда нам не удается провести прямое доказательство.

Рассмотрим примеры двух задач.

1. В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков AM и MB (AM > MB).

Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: AH = = HM + MB (задача Архимеда).

Решение. Пусть верно равенство:

$$AH = HM + MB. \qquad (1)$$

Выполним следующие построения. Достроив дугу до окружности с центром O, проведем радиусы OA, OK, OM, OB и серединные перпендикуляры OE и OP соответственно к хордам AM и MB (рис. 1; C и D – точки их пересечения с окружностью). Тогда OK ⊥ AB. Из условия AH − HM = MB. С другой стороны, AH + HM = AM. Из этих равенств

$AH = \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}MB$ или

$$AH = AE + MP. \quad (2)$$

Далее, $$AH = AE + EH. \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) имеем:

$$EH = MP. \quad (4)$$

Нам остается доказать равенство (4) – следствие равенства (1).

$\angle HKO = \angle MAB = \angle COK$, как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Но $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup MB = \cup MD$, $\angle COK = \cup CK$ и поэтому $\cup CK = \cup MD$. Отсюда равны и хорды CK и MD, а также и треугольники COK и MOD по трем сторонам. Проведя в треугольнике COK высоту KE_1 ($KE_1 = EH$, т.к. EE_1KH – прямоугольник), заключаем, что $KE_1 = MP$, т.е. $EH = MP$.

Таким образом, из верности равенства (4) и следует верность равенства (1).

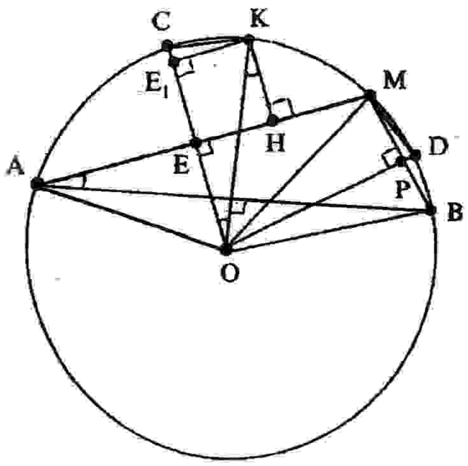

Рис. 1

2. Пусть T –геометрическое тело (T ∈ {призма, цилиндр, пирамида, усеченная пирамида, конус, усеченный конус, шар}) с параллельными основаниями, S_1 и S_2 – площади оснований, S – площадь

среднего[*] сечения плоскостью, параллельной основаниям, h – высота, V – объем. Тогда:

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S). \qquad (1)$$

(формула Ньютона-Симпсона).

Решение. Пусть верно равенство (1).

1. Если T – призма, то $S_1 = S_2 = S$ и $V = \frac{h}{6}(S + S + 4S)$, $V = \frac{h}{6} \cdot 6S$,

т.е.

$$V = Sh. \qquad (2)$$

Равенство (2) верно, тогда верно и равенство (1).

2. Если T – цилиндр, то доказательство аналогично случаю призмы.

3. Если T –пирамида, то имеем одно основание (нижнее), а верхнего основания нет (оно есть точка). Тогда $S_2 = 0$. Выразим S через S_1. Расстояние от вершины пирамиды до среднего сечения будет $\frac{h}{2}$. Так как отсеченная пирамида и данная пирамида подобны, то:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{h^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{откуда} \qquad S = \frac{1}{4}S_1.$$

Отсюда $V = \frac{h}{6}(S_1 + 0 + 4 \cdot \frac{1}{4}S_1)$, т.е.

$$V = \frac{1}{3}S_1 h. \qquad (3)$$

Равенство (3) верно, поэтому верно и равенство (1).

4. Если T – конус, то доказательство аналогично случаю пирамиды.

5. Пусть T – произвольная усеченная пирамида (рис. 2). Достроим ее до полной пирамиды. Пусть верхнее основание усеченной пирамиды отстоит от вершины полной пирамиды на расстоянии X.

[*] средним сечением тела называется сечение тела плоскостью, проходящей через середину его высоты.

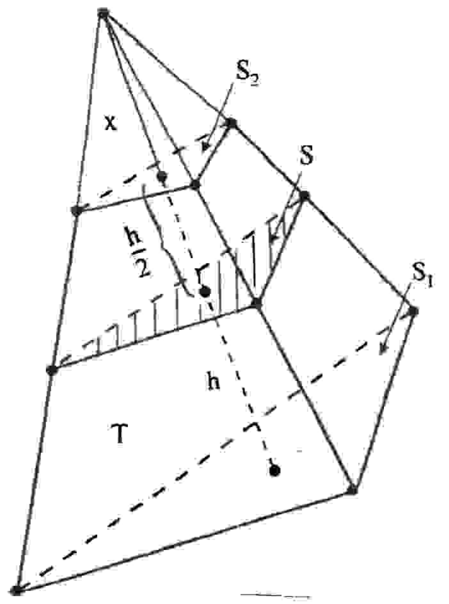

Рис. 2

Выразим S через S_1 и S_2. Для этого рассмотрим пирамиды с высотами X, $X+\frac{h}{2}$ и X + h. Так как эти пирамиды подобны, то имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{(X+\frac{h}{2})^2}{X^2}=\dfrac{S}{S_2}, \\ \dfrac{(X+h)^2}{X^2}=\dfrac{S_1}{S_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{h}{2X}=\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_2}}, \\ 1+\dfrac{h}{X}=\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{\sqrt{S_2}}{2(\sqrt{S}-\sqrt{S_2})}h, \\ X=\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_2}}{2(\sqrt{S}-\sqrt{S_2})}h=\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}h,$$

$$\frac{1}{2(\sqrt{S}-\sqrt{S_2})}=\frac{1}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}},$$

$$2(\sqrt{S}-\sqrt{S_2})=\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2},$$

$$2\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2},$$ откуда:

$$S = \frac{S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}}{4}. \qquad (4)$$

Из равенств (1) и (4) имеем:

$$V = \frac{h}{6} \cdot (S_1 + S_2 + 4 \cdot \frac{S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}}{4}),$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot (2 \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})),$$ откуда:

$$V = \frac{h}{3} \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$ – что верно для усеченной пирамиды. Поэтому верно и равенство (1).

6. Если Т – усеченный конус, то доказательство аналогично случаю усеченной пирамиды.

7. Если Т – шар радиуса R, то нижнее и верхнее основания его – точки, а среднее сечение – большой круг. Тогда $S_1 = S_2 = 0$, $S = \pi R^2$, $h = 2R$ и по формуле (1): $V = \frac{2R}{6}(0 + 0 + 4 \cdot \pi R^2)$, откуда $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ что верно для шара. Поэтому формула (1) верна.

Мы решили задачу 2, сведя ее к следствиям, верность которых нам была известна. А если следствия нам не известны, то как быть? В этом случае дадим вывод искомой формулы с помощью интеграла.

Прежде заметим, что все основные тела, рассматриваемые в элементарной геометрии, относятся к классу тел с квадратичным законом изменения площади поперечного сечения.

Возьмем тело Т с параллельными основаниями и высотой h (рис. 3). Направим ось x по высоте h (начало оси x – точка O лежит в нижнем основании) и рассмотрим площадь S(x) сечения тела плоскостью, параллельной основаниям. Тогда S(x) есть функция на отрезке $x \in [0;h]$. Предположим, что S(x) изменяется по квадратичному закону, т.е. является многочленом от x второй степени:

$$S(x) = ax^2 + bx + c \qquad (0 \le x \le h).$$

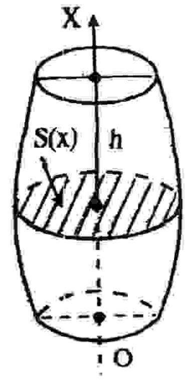

Рис. 3

Пусть V – объем тела T. Тогда

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h (ax^2 + bx + c)dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Big|_0^h,$$

откуда:

$$\mathbf{V} = a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch. \qquad (1)$$

Таким образом, чтобы найти объем V тела T, достаточно найти три коэффициента a, b и c в формуле (6). А для этого достаточно знать S(x) при трех значениях x. Чаще всего берут x = 0, $x = \frac{h}{2}$ и x = h, так что S(0) и S(h) – это площади "конечных" сечений тела T, $S(\frac{h}{2})$ – площадь "среднего сечения.

Введем обозначения $S(0) = S_1$, $S(h) = S_2$ и $S(\frac{h}{2}) = S$. Тогда относительно параметров a, b и c имеем систему трех уравнений ($S(x) = ax^2 + bx + c$):

$$\begin{cases} c = S_1, \\ c + bh + ah^2 = S_2, \\ c + b\frac{h}{2} + a(\frac{h}{2})^2 = S \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{2S_1 + 2S_2 - 4S}{h^2}, \\ b = \dfrac{4S - 3S_1 - S_2}{h}, \\ c = S_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Подставив соотношения (2) в равенство (1), получим окончательно:

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S)$$ – искомая формула Ньютона-Симпсона.

Попутно отметим, что вывод формул объемов геометрических тел можно изящно осуществить по формуле Ньютона-Симпсона (см. решение задачи 2).

Литература

Сефибеков С.Р. Несколько вопросов геометрии.- Н. Новгород: издательство нижегородского института экономического развития, 1999