ФОНД 21 ВЕКА

(Фонд Образовательной и Научной Деятельности 21 века)

Всероссийский педагогический конкурс

«МОЯ ЛУЧШАЯ МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА»

Сефибеков Сефибек Рамазанович

МАТЕМАТИКА НА ЦИФЕРБЛАТЕ ПРАВИЛЬНО ИДУЩИХ ЧАСОВ

(современные образовательные технологии – элективный курс)

Дагестан – Кашкент

2023

МАТЕМАТИКА НА ЦИФЕРБЛАТЕ ПРАВИЛЬНО ИДУЩИХ ЧАСОВ

С.Р.Сефибеков, с. Кашкент, Хивский район, Республика Дагестан

Решение любой задачи требует её математизации, то есть перевода условия задачи на математический язык — язык символов.

С. Р. Сефибеков

Часто учителя предлагают учащимся задачи, связанные с движением стрелок на циферблате правильно идущих часов. Такие задачи развивают логическое мышление, зрительную память, острый глазомер, творческое мышление, способствуют формированию навыков исследовательской деятельности. Рассмотрим одну из таких задач.

Задача

Часы показывают полдень.

1. Через сколько часов впервые совпадут:
   а) минутная и часовая стрелки;
   б) секундная и минутная стрелки;
   в) секундная и часовая стрелки?
2. Сколько раз за сутки совпадут:
   а) минутная и часовая стрелки;
   б) секундная и минутная стрелки;
   в) секундная и часовая стрелки;
   г) все три стрелки?
3. Сколько раз в сутки образуют прямой угол:
   а) минутная и часовая стрелки;
   б) секундная и минутная стрелки;
   в) секундная и часовая стрелки?

Вспомогательные предложения

Предложение 1. Циферблат часов содержит 60 делений. Стрелка часов, описывая полный круг циферблата, поворачивается на 360°. Тогда на одно деление приходится $360°:60=6°$.

Предложение 2. Если минутная стрелка часов поворачивается на одно деление, то секундная стрелка поворачивается на 60 делений (делает полный оборот, то есть поворачивается на 360°). Значит, секундная стрелка движется в 60 раз быстрее минутной.

Предложение 3. Если часовая стрелка поворачивается на 5 делений (на $5\cdot 6°=30°$, то есть отсчитывает 1 час), то минутная стрелка поворачивается на 60 делений (на 360°). Значит, минутная стрелка движется в $360°:30°=12$ раз быстрее часовой.

Предложение 4. Если часовая стрелка поворачивается на 5 делений (на $5\cdot 6°=30°$, то есть отсчитывает 1 час), то секундная стрелка поворачивается на

$$60\cdot 60=3600$$

делений (на $3600\cdot 6°$). Значит, секундная стрелка движется в $3600\cdot 6°:30°=720$ раз быстрее часовой.

Решение

1. а) Первый раз минутная и часовая стрелки совпадут после 13.00. Пусть после 13.00 часовая стрелка до совпадения с минутной повернулась на $x°$. Тогда, если отсчитывать от начального положения, часовая стрелка до совпадения с минутной повернётся на $30°+x°$, а минутная (до совпадения) — на

$$360°+30°+x°=390°+x°.$$

Отсюда имеем уравнение (*см. предложение 3*):

$$390+x=12(30+x),$$

откуда

$$x=\frac{30}{11}.$$

Значит,

$$30°+x°=30°+\left(\frac{30}{11}\right)°=\left(\frac{360}{11}\right)°.$$

Составим таблицу.

Стрелки часов	Число градусов поворота	Соответствующее время, ч	Зависимость между числом градусов и соответствующим временем
Часовая	30	1	Пропорциональная
Минутная	$\frac{360}{11}$	t	

Имеем пропорцию:

$$\frac{\frac{30}{\frac{360}{11}}}{} = \frac{1}{t},$$

откуда

$$t = 1\frac{1}{11}.$$

Значит, впервые после полудня минутная и часовая стрелки совпадут через $1\frac{1}{11}$ часа.

б) Если минутная стрелка поворачивается на одно деление (на 6°), то секундная стрелка поворачивается на 60 делений (360°). Значит, совпадение произойдёт после того, как минутная стрелка повернётся на одно деление. Допустим, что после пройденного одного деления минутная стрелка повернулась на $x°$ до совпадения с секундной стрелкой. Тогда минутная стрелка до совпадения повернулась на $6° + x°$, а секундная — на

$$360° + 6° + x° = 366° + x°.$$

Имеем уравнение (см. Предложение 2):

$$366 + x = 60(6 + x),$$

откуда

$$x = \frac{6}{59} \text{ и } 6° + x° = 6° + \left(\frac{6}{59}\right)° = \left(\frac{360}{59}\right)°.$$

Значит, при повороте минутной стрелки на $\left(\frac{360}{59}\right)°$ происходит первое совпадение минутной и секундной стрелок.

Составим таблицу.

Стрелки часов	Число градусов поворота	Соответствующее время, мин	Зависимость между числом градусов и соответствующим временем
Минутная	6	1	Пропорциональная
Секундная	$\frac{360}{59}$	t	

Имеем пропорцию:

$$\frac{6}{\frac{360}{59}} = \frac{1}{t},$$

откуда

$$t = \frac{60}{59} \text{ (мин), или } \frac{1}{59} \text{ ч.}$$

Значит, впервые после полудня минутная и секундная стрелки совпадут через $\frac{1}{59}$ часа.

в) Если секундная стрелка поворачивается на 360°, то часовая стрелка поворачивается на

$$360° : 720 = 0,5°$$

(*см. предложение 4*). Допустим, что после поворота на 0,5° часовая стрелка до совпадения с секундной повернётся ещё на $x°$, то есть всего — на $0,5° + x°$. Тогда секундная стрелка до совпадения с часовой повернётся на

$$360° + 0,5° + x° = 360,5° + x°.$$

Имеем уравнение (см. предложение 4):

$$360,5 + x = 720(0,5 + x),$$

откуда

$$x = \frac{1}{1438} \text{ и } 0,5° + \left(\frac{1}{1438}\right)° = \left(\frac{360}{719}\right)°.$$

Составим таблицу.

Стрелки часов	Число градусов поворота	Соответствующее время, ч	Зависимость между числом градусов и соответствующим временем
Часовая	30	1	Пропорциональная
Секундная	$\frac{360}{719}$	t	

Имеем пропорцию:

$$\frac{30}{\frac{360}{719}} = \frac{1}{t},$$

откуда

$$t = \frac{12}{719}.$$

Значит, впервые после полудня часовая и секундная стрелка совпадут через $\frac{12}{719}$ часа.

2. В сутках 24 часа. Воспользовавшись результатами 1 а), б), в), получим:

а) $24 : 1\frac{1}{11} = 22$, то есть минутная и часовая стрелки за сутки совпадут 22 раза.

б) $24 : \frac{1}{59} = 1416$, то есть секундная и минутная стрелки за сутки совпадут 1416 раз.

в) $24 : \frac{12}{719} = 1438$, то есть секундная и часовая стрелки за сутки совпадут 1438 раз.

г) Из решений 2 а), б) следует, что минутная и часовая стрелки за 12 часов совпадут

$$22 : 2 = 11 \text{ раз},$$

а секундная и минутная стрелки —

$$1416:2=708 \text{ раз}.$$

Допустим, что до первого совпадения всех трёх стрелок минутная и часовая стрелки совпадают x раз, а секундная и минутная стрелки — y раз, где

$$0<x\le 11 \text{ и } 0<y\le 708,\ x\in\mathbb{N},\ y\in\mathbb{N}.$$

Тогда, учитывая 1 а), б), получим уравнение:

$$1\frac{1}{11}x=\frac{1}{59}y,$$

откуда

$$y=\frac{708}{11}x.$$

Поскольку числа 708 и 11 взаимно простые, то y — целое при $x=11$, то есть $y=708$. Тогда имеем:

$$1\frac{1}{11}\cdot 11=\frac{1}{59}\cdot 708=12.$$

Таким образом, 11-е совпадение минутной и часовой стрелок и 708-е совпадение секундной и минутной стрелок произойдёт через 12 часов. Следовательно, через 12 часов произойдёт первое совпадение всех трёх стрелок. А за сутки (за 24 часа) произойдёт два их совпадения.

3. а) Если часовая стрелка поворачивается на 30°, то минутная стрелка поворачивается на 360°; угол между стрелками —

$$360°-30°=330°.$$

Составим пропорцию:

$$30° — 330°$$

$$x° — 90°$$

$$\frac{30}{x}=\frac{330}{90},$$

откуда

$$x=\frac{90}{11}.$$

Значит, при повороте часовой стрелки на $\left(\frac{90}{11}\right)^{\circ}$ угол между минутной и часовой стрелками составит 90°.

За сутки часовая стрелка поворачивается на 720°. Тогда получим:

$$720:\frac{90}{11}=88,$$

то есть имеем 88 углов, половина из которых — прямые. Таким образом, за сутки минутная и часовая стрелки образуют прямой угол 44 раза.

б) Если минутная стрелка поворачивается на 6° (одно деление), то секундная стрелка поворачивается на 360° (60 делений); угол между стрелками —

$$360°-6°=354°.$$

Составим пропорцию.

$$6° — 354°$$

$$x° — 90°$$

$$\frac{6}{x}=\frac{354}{90},$$

откуда

$$x=\frac{90}{59}.$$

Значит, при повороте минутной стрелки на $\left(\frac{90}{59}\right)^{\circ}$ угол между секундной и минутной стрелками составит 90°. За сутки минутная стрелка поворачивается на $24\cdot 360°$. Отсюда имеем:

$$24\cdot 360°:\frac{90}{59}=5664.$$

Половина из 5664 углов — прямые, то есть имеем $5664:2=2832$ прямых угла.

в) Если часовая стрелка поворачивается на 0,5°, то секундная стрелка поворачивается на 360° (см. предложение 4); угол между стрелками — $360°-0{,}5°=359{,}5°$.

Составим пропорцию.

$$0{,}5° — 359{,}5°$$

$$x° — 90°$$

$$\frac{0{,}5}{x}=\frac{359{,}5}{90},$$

откуда

$$x=\frac{90}{719}.$$

Значит, при повороте часовой стрелки на $\left(\frac{90}{719}\right)^{\circ}$ угол между секундной и часовой стрелками составит 90°. За сутки часовая стрелка поворачивается на 720°. Отсюда

$$720°:\frac{90}{719}=5752.$$

Половина из 5752 углов — прямые, то есть имеем $5752:2=2876$ прямых углов.

Ответы

1. а) Через $1\frac{1}{11}$ часа; б) через $\frac{1}{59}$ часа; в) через $\frac{12}{719}$ часа.
2. а) 22 раза; б) 1416 раз; в) 1438 раз; г) 2 раза.
3. а) 44 раза; б) 2832 раза; в) 2876 раз.

Литература:

Сефибеков С.Р. Математика на циферблате правильно идущих часов // Математика. Все для учителя! - № 10 (58) 2015. – С. 33-35