Фонд 21 века

Фонд Образовательной и Научной Деятельности 21 века

Всероссийский педагогический конкурс

«МОЯ ЛУЧШАЯ МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА»

(творческий учитель- 2023)

Сефибеков Сефибек Рамазанович

В МИРЕ АРИФМЕТИКИ И ГЕОМЕТРИИ

(современные образовательные технологии – Элективный курс)

Дагестан-Кашкент

2023

Содержание

Стр

Сефибек Рамазанович
Сефибеков

Сефибеков

Сефибек Рамазанович

Почетный работник общего образования РФ,

Заслуженный учитель Республики Дагестан,

Учитель высшей категории,

Кандидат педагогических наук,

МКОУ «Кашкентская СОШ» Хивского района

Республики Дагестан.

Автор более **150** научных и методических работ, регулярно публикуются в журналах «Квант», «Математика в школе», «Математика»

Научные работы автора посвящены исследовательской деятельности школьников в урочной и внеурочной деятельности по математике на основе авторских элективных разработок «За страницами школьного учебника».

ИТОГИ 58-ЛЕТНЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ШКОЛЕ

Всем известно, как трудно сделать что-нибудь стоящее, поэтому я считаю себя счастливым, что мне удалось написать множество научно-методических, теоритических и педагогических трудов по математике. Но тщеславие отступает на задний план , когда думаешь о том , сколько проблем ты пытался вновь и вновь решать, но так и не смог. Ясно ,что никто не может претендовать на монополию в математических способностях или на создание прекрасного в математике. В беге не всегда одерживает победу быстрейший , а в борьбе-сильнейший !

Вся моя жизнь в математике была связана с тяжелым трудом. Я всегда знал, что нет королевского пути к математическим знаниям или к математическим открытиям. Но этот труд стоит того, чтобы его предпринимать. Для меня не существует большей радости, чем преодолевать препятствия и добиваться результата , и вероятно, каждый чувствует себя счастливее ,когда делает работу, которая ему нравится (психологами доказано ,что, если такая работа дает свои результаты, то- это долголетие для человека!).

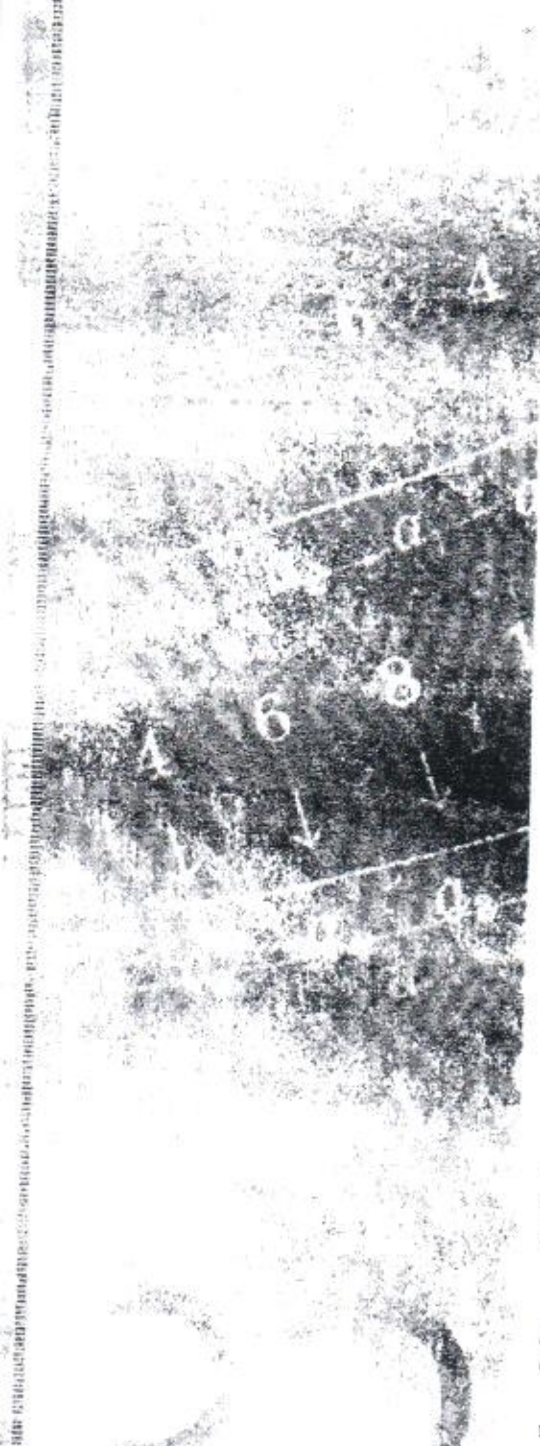
Я часто испытывал чувство восхищения и удивления красотой математики. Не могу придумать более подходящей аналогии, чем восхождение на вершины гор. Огромные усилия тут неизбежны . Но как прекрасно, проложив новый путь , который казался столь трудным , любоваться с вершины раскинувшимся перед тобой пейзажем и наслаждаться его красотой . В зрелом возрасте оглядываясь назад и размышляя над математикой с новых точек зрения, иногда удивляешься собственным старым результатам и почти не веришь, что они принадлежат тебе. Они представляются тебе самостоятельными сущностями, не зависимыми от их автора. Иногда даже приятно наблюдать так свои работы , забывая о собственном авторстве.

Я полностью удовлетворен своей **58** летней учительской работой, и не желал бы для себя никакой другой судьбы. Некоторые учителя , удалившись на покой или даже несколько раньше , кажется , утрачивают интерес к работе, которая их занимала много лет. Необъяснимо, как они могут так полностью порывать с интересами своей предыдущей жизни. Что же касается меня, то я рад продолжать свою работу и написать научно-педагогические труды. Но я буду удовлетворен и если просто сохраню любовь к профессии учителя математики!

Сефибек Рамазанович

С. СЕФИБЕКОВ,
с. Кашкент,
Республика Дагестан

ОБЩИЙ ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО



Определение. Признаком делимости называется правило, по которому, не выполняя деления, можно установить, делится ли одно число на другое.

С некоторыми признаками делимости учащиеся знакомятся в курсе математики 6-го класса. Общий признак делимости — признак делимости на натуральное число — связан с именем знаменитого французского математика, физика и философа Блеза Паскаля (1623–1662).

Приведу вывод «признака Паскаля» и рассмотрю некоторые его следствия. Данный материал учитель может использовать на кружковых и элективных занятиях с учащимися 8–9-х классов.

Натуральные числа можно записать в виде суммы их разрядных единиц. Например, число 756:

$$756 = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2;$$

число 2354:

$$2354 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3$$

и т.д. Если мы имеем некоторое $(n + 1)$-значное число A, то его можно записать в виде

$$A = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его разрядные единицы, $A = \overline{a_0 a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Установим делимость натурального числа A на натуральное число $b \neq 1$. Пусть g_0 и r_0, g_1 и r_1, g_2 и r_2, ..., g_n и r_n — соответственно частные и остатки деления чисел $1 = 10^0, 10, 10^2, \ldots, 10^n$ на число b ($0 \leq r_i < b$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Тогда

$$1 = bg_0 + r_0,\ 10 = bg_1 + r_1,\ 10^2 = bg_2 + r_2,\ \ldots,\ 10^n = bg_n + r_n.$$

Подставим данные выражения в равенство (1):

$$A = a_0(bg_0 + r_0) + a_1(bg_1 + r_1) + a_2(bg_2 + r_2) + \ldots + a_n(bg_n + r_n).$$

Учитывая, что $g_0 = 0$, имеем:

$$A = b(a_1g_1 + a_2g_2 + \ldots + a_ng_n) + (a_0r_0 + a_1r_1 + \ldots + a_nr_n). \qquad (2)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2) делится на b. Поэтому если A делится на b, то и второе слагаемое делится на b. И наоборот, если второе слагаемое делится на b, то и A делится на b. Это и есть *«признак Паскаля»*:

Если число A делится на число $b \neq 1$, то сумма

$$a_0r_0 + a_1r_1 + \ldots + a_nr_n \qquad (*)$$

делится на b и наоборот, если сумма (*) делится на b, то и A делится на b.

Примечание 1. Признак Паскаля сводится к вычислению суммы (*). Главным его недостатком является вычисление остатков r_0, r_1, r_2, ... непосредственным делением степеней числа 10 на число b. От этих остатков и зависит вычислительная работа в приведенной выше сумме. Если эта работа большая, то признаком Паскаля пользоваться не следует, а делимость чисел лучше проверить непосредственным делением.

Частные случаи признака Паскаля как его следствия

1. Пусть $b = 2$, тогда $r_0 = 1$, $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ и потому

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = a_0.$$

Мы получили *признак делимости числа A на 2*:

Число делится на 2, если оно четно, то есть когда его последняя цифра делится на 2.

2. Пусть $b = 3$ (или $b = 9$). Тогда

$$r_0 = r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$$

и

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

— это сумма цифр числа A. Она и определяет *признак делимости числа A на 3 (или на 9)*:

Если сумма цифр числа делится на 3 (или на 9), то и само число делится на 3 (или на 9).

3. Пусть $b = 7$. Тогда

$$r_0 = 1,\ r_1 = 3,\ r_2 = 2,\ r_3 = 6,\ r_4 = 4,\ r_5 = 5,\ r_6 = 1,$$
$$r_7 = 3,\ r_8 = 2,\ r_9 = 6,\ r_{10} = 4,\ r_{11} = 5,\ \ldots.$$

Мы видим, что идет повторение остатков: 1, 3, 2, 6, 4, 5; 1, 3, 2, 6, 4, 5; ....

Для делимости на 7 у остатков 6, 4, 5 не хватает соответственно 1, 3, 2. Эти недостающие единицы запишем со знаком «−»: −1, −3, −2. Тогда остатки выглядят следующим образом:

$$r_0 = 1,\ r_1 = 3,\ r_2 = 2,$$
$$r_3 = -1,\ r_4 = -3,$$
$$r_5 = -2,\ r_6 = 1,$$
$$r_7 = 3,\ r_8 = 2,$$
$$r_9 = -1,\ r_{10} = -3,$$
$$r_{11} = -2,\ \ldots.$$

Здесь имеем:

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2 - a_3 \cdot 1 - a_4 \cdot 3 - a_5 \cdot 2,\ \ldots$$

(далее остатки 1, 3, 2, −1, −3, −2 повторяются). Запишем последнюю сумму в виде

$$(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2) - (a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 3 + a_5 \cdot 2) + \ldots. \quad (3)$$

Соотношение (3) определяет *признак делимости числа A на число 7*.

Составим *алгоритм к сумме (3)*.

1. Разбиваем число справа налево на грани по 6 цифр (в гранях могут оказаться и меньше шести цифр).

2. Занумеруем в каждой грани цифры справа налево так: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

3. Вычислим сумму (3). Если значение этой суммы делится на 7, то и число делится на 7. В противном случае — число не делится на 7.

Пример 1. Установите делимость чисел на 7:
а) 2359; б) 46 382; в) 321 783;
г) 31 468 164; д) 20 321 356 384 013 293.

Решение.

а)
$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 5 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(9 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (2 \cdot 1) = 30 - 2 = 28,$$

делится на 7, тогда 2359 делится на 7.

б)
$$\begin{array}{ccccc} 4 & 6 & 3 & 8 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(2 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (6 \cdot 1 + 4 \cdot 3) = 32 - 18 = 14,$$

делится на 7, тогда 46 382 делится на 7.

в)
$$\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 1 & 7 & 8 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(3 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2) - (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = 41 - 13 = 28,$$

делится на 7, тогда 321 783 делится на 7.

г)
$$\begin{array}{cc|cccccc} 3 & 1 & 4 & 6 & 8 & 1 & 6 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 2) - (8 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2) + (1 \cdot 1 + 3 \cdot 3) = 24 - 34 + 10 = 0,$$

делится на 7, тогда 31 468 164 делится на 7.

д)
$$\begin{array}{ccccc|cccccc|cccccc} 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 3 & 8 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 & 9 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(3 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot 2) - (3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2) + (4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2) + (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (0 \cdot 1 + 2 \cdot 3) = 34 - 6 + 34 - 27 + 13 - 6 = 42,$$

делится на 7, тогда 20 321 356 384 013 293 делится на 7.

4. Пусть $b = 11$. Тогда

$$r_0 = 1,\ r_1 = 10,\ r_2 = 1,\ r_3 = 10,\ r_4 = 1,\ r_5 = 10,\ \ldots.$$

Для делимости числа A на 11 у остатков r_1, r_3, r_5, ... не хватает 1. Эту недостающую 1 запишем со знаком «−», то есть −1. Тогда остатки примут вид:

$$r_0 = 1,\ r_1 = -1,\ r_2 = 1,\ r_3 = -1,\ r_4 = 1,\ r_5 = -1,\ \ldots.$$

Имеем:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$$

или

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) \quad (4)$$

Соотношение (4) определяет *признак делимости числа A на 11*, а именно:

Если разность между суммами цифр числа, стоящих на четных и нечетных местах, делится на 11, то и число A делится на 11.

Примечание 2. Расположение цифр в сумме (4) можно определить слева направо и наоборот, справа налево. Это не влияет на установленный алгоритм.

Пример 2. Число 543 675 319 делится на 11, так как

$$(5+3+7+3+9)-(4+6+5+1)= \\ =27-16=11,$$

делится на 11.

5. Для получения признака делимости на 13 ($b=13$) будем иногда брать остатки от деления чисел 10^0, 10, 10^2, 10^3, ... на 13, а иногда и недостатки (взятые со знаком минус):

$$r_0=1,\ r_1=-3,\ r_2=-4, \\ r_3=-1,\ r_4=3,\ r_5=4,\ r_6=1,\ \ldots$$

(далее те же остатки повторяются, начиная с r_1 до r_6). Тогда

$$a_0-3a_1-4a_2-a_3+3a_4+4a_5+a_6-\ldots,$$

$$a_0-(3a_1+4a_2+a_3)+(3a_4+4a_5+a_6)-\ldots. \qquad (5)$$

Составим *алгоритм к сумме (5)*.

1. Разбиваем число справа налево на грани по 3 цифры, исключив первую цифру a_0 (в гранях могут оказаться и меньше трех цифр).

2. Занумеруем в каждой грани цифры справа налево так: a_1, a_2, a_3.

3. Вычислим сумму (5). Если значение этой суммы делится на 13, то и число делится на 13.

Пример 3. Установите делимость чисел на 13:
а) 52 651; б) 265 265 091;
в) 780 265 265 091.

Решение.

$$\text{а)}\ \begin{array}{ccccc} 5 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & \end{array}$$

$$1-(3\cdot5+4\cdot6+2)+(3\cdot5)=1-41+15=-25,$$

не делится на 13, тогда 52 651 не делится на 13.

$$\text{б)}\ \begin{array}{ccccccccc} 2 & 6 & 5 & 2 & 6 & 5 & 0 & 9 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & \end{array}$$

$$1-(3\cdot9+4\cdot0+5)+ \\ +(3\cdot6+4\cdot2+5)-(3\cdot6+4\cdot2)= \\ =1-32+31-26=-26,$$

делится на 13, тогда 265 265 091 делится на 13.

$$\text{в)}\ \begin{array}{cccccccccccc} 7 & 8 & 0 & 2 & 6 & 5 & 2 & 6 & 5 & 0 & 9 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & \end{array}$$

$$1-(3\cdot9+4\cdot0+5)+ \\ +(3\cdot6+4\cdot2+5)-(3\cdot6+4\cdot2+0)+ \\ +(3\cdot8+4\cdot7)=1-32+31-26+52=26,$$

делится на 13, тогда 780 265 265 091 делится на 13.

Пример 4. Докажите, что число $A=888\ldots8$, состоящее из 2022 цифр, делится на 13.

Решение. Возьмем число $A_1=888\,888$, состоящее из 6 цифр, и применим к нему алгоритм:

$$8-(3\cdot8+4\cdot8+8)+(3\cdot8+4\cdot8)=8-8=0.$$

Так как 0 делится на 13, то и число A_1 делится на 13. Заметим, что $\frac{2022}{6}=337$. Тогда число A можно разбить на 337 граней, содержащих по шесть цифр. Следовательно, число A делится на 13.

Примечание 3. Если число b представляет собой произведение простых множителей, для которых признак Паскаля уже установлен, то легко установить признак делимости на это число. Например, если $b=3\cdot11=33$, то число делится на 33, если оно делится на 3 и на 11.

В заключение предлагаю читателям поработать над проблемой получения других признаков делимости как следствий признака Паскаля.

Литература

1. *Виленкин Н.Я.* Математика. Учеб. для 6 кл. общеобразоват. учреждений. — 30-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2013.

2. *Сефибеков С.Р.* Внеклассная работа по математике: кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1988.

3. Сефибеков С.Р. Общий признак делимости на натуральное число// Математика №5, 2021.-С. 32-34

КЛЮЧ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ — ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ ФИГУРЫ К ДРУГОЙ

С. Р. Сефибеков, с. Кашкент, Хивский р-н, Республика Дагестан

Человеческий ум открывает и познаёт сначала конкретное, из чего он впоследствии развивает общее. Переход от конкретного к общему является естественным ходом развития, и обучение учащихся в школе должно придерживаться этого пути.

С. Р. Сефибеков

Приём перехода от одной фигуры к другой облегчает решение сложной геометрической задачи, а также способствует переоткрытию известных теорем. Покажем это на примерах.

Рассмотрим следующую геометрическую задачу.

Задача. К двум касающимся извне окружностям ω_1 и ω_2 проведены общие касательные l_1 и l_2; A, B, C, D и E — точки касания (*рис. 1*). Если прямые AC и BD проходят через точку E, то $\omega_1 = \omega_2$. Докажите.

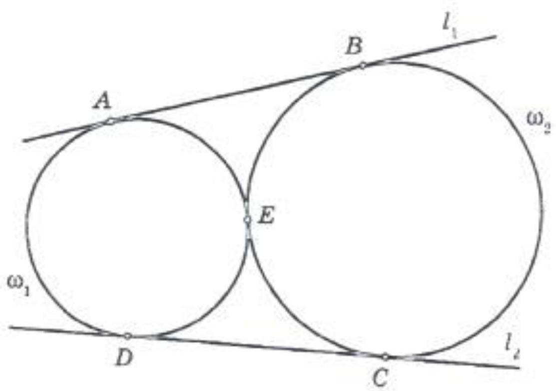


Рис. 1

Доказательство

Пусть прямые AC и BD проходят через точку E и $\omega_1 \neq \omega_2$ (*рис. 2*). Обозначим точку пересечения касательных l_1 и l_2 через T, центры окружностей — через O_1 и O_2. Точки O_1 и O_2 равноудалены от сторон угла BTC, поэтому они лежат на биссектрисе TT_1 этого угла.

Докажем, что наше допущение неверно, то есть докажем, что $ABCD$ — квадрат, и тогда

$$AB \parallel DC, \ \omega_1 = \omega_2.$$

Доказательство проведём по схеме (указывая на последовательное превращение четырёхугольника в квадрат): $ABCD \to$ равнобокая трапеция $\to$ $\to$ прямоугольник $\to$ квадрат.

По свойству касательных

$$AT = DT, \ BT = CT.$$

Тогда $AB = DC$. В равнобедренных треугольниках ATD и BTC $TT_1 \perp AD$, $TT_1 \perp BC$. Тогда $AD \parallel BC$. Отсюда $ABCD$ — равнобокая трапеция и $AC = BD$.

Пусть l_3 — общая касательная к окружностям ω_1 и ω_2 в точке E, M и N — точки её пересечения с касательными l_1 и l_2. Тогда $l_3 \perp O_1O_2$. Отсюда $MN \parallel AD$ (и $MN \parallel BC$). С другой стороны, по свойству касательных

$$MA = MB = ME,$$

то есть точка M — середина AB. Аналогично точка N — середина DC.

Таким образом, MN — средняя линия трапеции $ABCD$. По теореме Фалеса из треугольника ABC точка E — середина AC, из треугольника BDC точка E — середина BD. Тогда у равнобокой трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD точкой их пересечения E делятся пополам. Значит, $ABCD$ — прямоугольник.

Заметим, что окружность диаметра AB проходит через точку E. Тогда

$$\angle AEB = 90^\circ \text{ и } AC \perp BD.$$

Но прямоугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями есть квадрат, что и требовалось доказать.

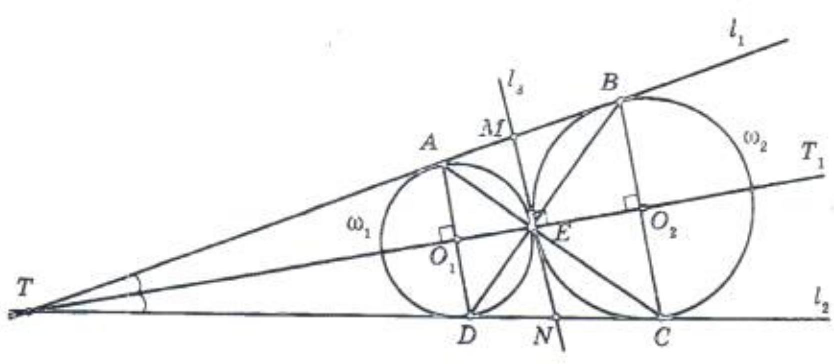


Рис. 2

Открытие теоремы индийского математика Брахмагупты (598–660) [1]

Вспомогательная задача 1: В прямоугольном треугольнике AOD на гипотенузе AD отмечена точка M так, что

$$\angle MOD = \angle MDO.$$

Докажите, что

$$AM = DM.$$

Доказательство

Поскольку по условию

$$\angle MOD = \angle MDO,$$

то треугольник MOD равнобедренный:

$$OM = DM.$$

Опишем около треугольника AOD окружность с центром E (точка E — середина гипотенузы AB) (*рис. 3*).

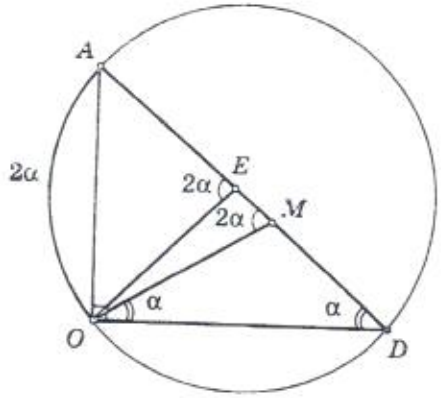


Рис. 3

Тогда

$$OE = AE = DE$$

как радиусы одной окружности. Пусть

$$\angle MOD = \angle MDO = \alpha.$$

Тогда $\angle AMO = 2\alpha$ как внешний угол треугольника MOD. С другой стороны, угол ODA — вписанный в окружность и опирающийся на дугу AO,

$$\cup AO = 2\angle ODA = 2\alpha.$$

Поскольку $\angle AMO = 2\alpha$ и угол AMO опирается на дугу $\cup AO = 2\alpha$, то угол AMO — центральный угол окружности. Поэтому

$$E \equiv M \text{ и } AM = DM,$$

что и требовалось доказать.

Вспомогательная задача 2. Внутри круга построен прямоугольный треугольник AOD с гипотенузой AD, вершины A и D принадлежат окружности круга (*рис. 4*). На AD взята точка M так, что $DM = OM$. Отрезки DO и AO продолжены до пересечения с окружностью в точках B и C, а отрезок OM продолжен до пересечения с хордой BC в точке N. Докажите, что

$$MN \perp BC.$$

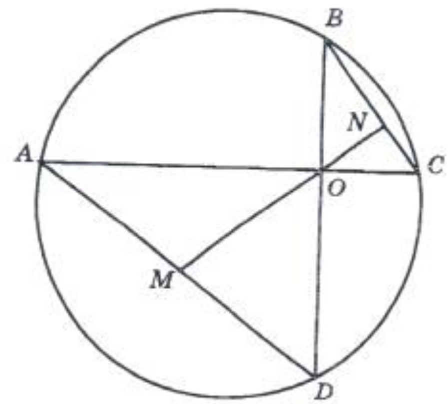


Рис. 4

Доказательство

По задаче 1:

$$AM = DM = OM,$$

треугольник MOD — равнобедренный

$$(\angle MOD = \angle MDO = \alpha).$$

Далее,

$$\angle BON = \angle MOD = \alpha$$

как вертикальные и

$$\angle DAC = \angle DBC = \beta$$

как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу DC (*рис. 5*).

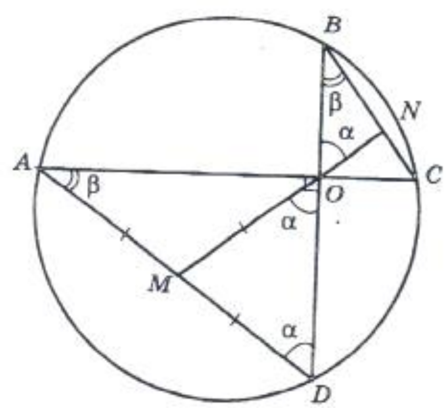


Рис. 5

Из треугольника AOD:

$$\alpha + \beta = 90°.$$

Из треугольника BON:

$$\angle ONB = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°.$$

Значит, $MN \perp BC$, что и требовалось доказать.

Решённые нами задачи 1 и 2 резюмируем в виде следующей теоремы.

Теорема Брахмагупты. Пусть имеется вписанный четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Опустим из точки пересечения диагоналей перпендикуляр на одну из его сторон. Будучи продолженным по другую сторону от точки пересечения диагоналей, этот перпендикуляр делит противоположную сторону четырёхугольника на две равные части (*рис. 6*).

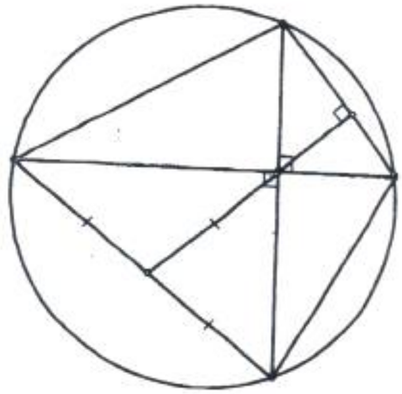


Рис. 6

Таким образом, нами переоткрыта историческая теорема.

Заметим, что представленный в данной статье материал способствует развитию математической деятельности, логического, творческого мышления, зрительной памяти (увидеть из рисунка, сопоставить, разобраться в комбинации фигур) учащихся; содействует развитию умений кратко излагать свои мысли в письменном виде; учит строгому доказательству в математических объектах, краткому изложению своих мыслей в письменном виде, терпению (чтобы добраться до «финиша»); показывает, как изученный ранее материал следует применить в рассуждениях; моделирует как бы решение научной проблемы элементарным путём (рассуждения ведутся от частного к общему (индуктивно), что важно для развития учащихся).

Литература

1. *Всеобщая* история изобретений и открытий. — М. : Эксмо, 2011. — С. 90.
2. *Погорелов А. В.* Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов. — 10-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 224 с. : ил.

3. Сефибеков С.Р. Ключ к решению задач- переход от одной фигуры к другой // Математика . ВСЕ для учителя! №2, 2015.-С. 2-4.

С. СЕФИБЕКОВ,
с. Кашкент, Хивский р-н,
Республика Дагестан

Элективный курс

ДОКАЗЫВАЕМ ФОРМУЛУ ПИКА

■ Введем понятие «целочисленная решетка».

Плоскость можно покрыть сеткой равных квадратов. Узлы этой сетки (вершины квадратов) в математике называют *целочисленной решеткой*.

Примером такой решетки служит лист клетчатой бумаги из школьной тетради. Такой лист будем просто называть *квадратной сеткой*.

Далее речь пойдет о вычислении площади многоугольника в узлах квадратной сетки. За единицу длины примем сторону клетки, за единицу площади — саму клетку.

Задача Пика. Площадь многоугольника с вершинами в узлах квадратной сетки равна

$$S = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1, \qquad (*)$$

где S — площадь многоугольника, выраженная в площадях единичных квадратов сетки; Г — количество узлов сетки, лежащих на границе многоугольника; В — количество узлов сетки, расположенных внутри многоугольника.

Формула (*) носит имя немецкого математика Пика, открывшего ее. Приведу свое доказательство и тем самым открою искомую формулу заново.

Докажем формулу (*), рассматривая несколько задач.

Задача основная. Выясните, сколько узлов содержит отрезок длины a с концами в узлах сетки.

Решение. Возможны четыре случая, изображенные на рисунках 1. Если отрезок a лежит на линии квадратной сетки (рис. 1,*а*), то он содержит $(a + 1)$ узел: $a = 9$ и узлов $a + 1 = 10$.

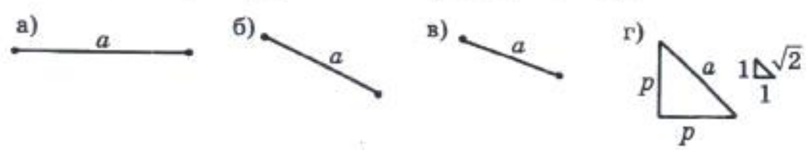


Рис. 1

Если отрезок a не лежит на линии квадратной сетки и не является осью симметрии клеток, то он может содержать внутренние узлы (рис. 1,*б*) и может не содержать внутренние узлы (рис. 1,*в*).

Если отрезок a является осью симметрии клеток (рис. 1,*г*), то, достроив его до прямоугольного треугольника с катетами, равными p, имеем:

$$a^2 = p^2 + p^2 = 2p^2, \; S = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1.$$

Отсюда отрезок a содержит $(p + 1)$ узел. На нашем рисунке $a = 4\sqrt{2}$. и узлов $4 + 1 = 5$.

Упражнение 1. Докажите формулу (*) для прямоугольника со сторонами, направленными вдоль линий сетки.

Решение. Пусть дан прямоугольник со сторонами a и b (рис. 2).

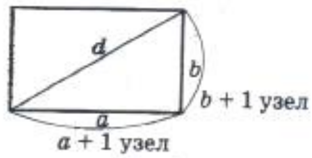


Рис. 2

Сторона a содержит $(a + 1)$ узел, сторона b содержит $(b + 1)$ узел, тогда прямоугольник содержит узлов

$$(a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1,$$

$$\Gamma = 2(a + 1) + 2(b + 1) - 4 = 2(a + b)$$

(так как четыре узла в вершинах прямоугольника к границе включили дважды, то нужно вычесть число 4),

$$\text{В} = (ab + a + b + 1) - 2(a + b) = ab - a - b + 1,$$

$$S = (ab - a - b + 1) + \frac{2(a+b)}{2} - 1 = ab,$$

Упражнение 2. Докажите формулу (*) для прямоугольного треугольника, катеты которого не равны и направлены вдоль линий сетки.

Решение. Проведя в прямоугольнике (см. рис. 2) диагональ d, получим треугольник с катетами a и b ($a \neq b$). Пусть диагональ d содержит внутри p узлов: $p = 0$ либо $p \geq 1$ (см. основную задачу). Отсюда:

$$\Gamma = (a + 1) + b + p = a + b + p + 1;$$

$$\text{В} = \frac{ab - a - b + 1 - p}{2}$$

(см. упражнение 1);

$$S = \frac{ab - a - b + 1 - p}{2} + \frac{a + b + p + 1}{2} - 1 = \frac{ab}{2}, .$$

Упражнение 3. Докажите формулу (*) для квадрата, стороны которого направлены вдоль линий сетки.

Решение. Предположим, что $a = b$. Тогда (см. упражнение 1):

$$\Gamma = 4a, \text{В} = a^2 - 2a + 1,\ S = (a^2 - 2a + 1) + \frac{4a}{2} - 1 = a^2.$$

Упражнение 4. Докажите формулу (*) для прямоугольного треугольника, катеты которого равны и направлены вдоль линий сетки.

Решение. Возьмем прямоугольный треугольник с катетами, равными a, и гипотенузой d (рис. 3).

Достроим его до квадрата. Так как внутри диагонали d содержится $(a - 1)$ узел (см. основную задачу), то:

$$\Gamma = (a + 1) + a + (a - 1) = 3a,$$

$$\text{В} = \frac{(a^2 - 2a + 1) - (a - 1)}{2} = \frac{a^2 - 3a + 2}{2}$$

(см. упражнение 2);

$$S = \frac{a^2 - 3a + 2}{2} + \frac{3a}{2} - 1 = \frac{a^2}{2}, .$$

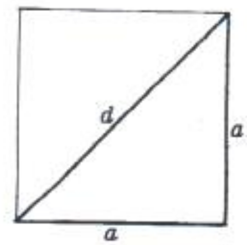


Рис. 3

Упражнение 5. Используя упражнения 1–4, докажите, что формула (*) верна для треугольника, у которого не более одной стороны направлено вдоль линий сетки.

Решение. Возьмем треугольник $A_1A_2A_3$ и опишем около него прямоугольник. Тогда возможны ситуации, изображенные на рисунках далее.

Пусть Π, Π_1, Δ_1, Δ_2, Δ_3 — соответственно площади описанного прямоугольника, малого прямоугольника и прямоугольных треугольников, дополняющих данный треугольник до описанного прямоугольника; В_Π, В_{Π_1}, В_1, В_2, В_3 — соответственно число их внутренних узлов; Γ_Π, Γ_{Π_1}, Γ_1, Γ_2, Γ_3 — соответственно число узлов на границе; q_1, q_2, q_3 — соответственно число внутренних узлов сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1; r_1, r_2 — число внутренних узлов на смежных сторонах малого прямоугольника.

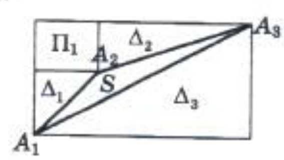


Рис.4

Тогда (рис. 4):

$$S = \Pi - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Pi_1), \tag{1}$$

по формуле (*):

$$\Pi = \text{В}_\Pi + \frac{\Gamma_\Pi}{2} - 1, \tag{2}$$

$$\Pi_1 = \text{В}_{\Pi_1} + \frac{\Gamma_{\Pi_1}}{2} - 1, \tag{3}$$

$$\Delta_1 = \text{В}_1 + \frac{\Gamma_1}{2} - 1, \tag{4}$$

$$\Delta_2 = \text{В}_2 + \frac{\Gamma_2}{2} - 1, \tag{5}$$

$$\Delta_3 = \text{В}_3 + \frac{\Gamma_3}{2} - 1. \tag{6}$$

Из равенств (1)–(6) получим:

$$S = В_п - (В_{п_1} + В_1 + В_2 + В_3) + \frac{Г_п - (Г_{п_1} + Г_1 + Г_2 + Г_3)}{2} + 3. \qquad (7)$$

Так как

$$В_п - (В_{п_1} + В_1 + В_2 + В_3) = В + (q_1 + q_2 + q_3) + (r_1 + r_2) + 1$$

(число 1 означает узел в точке A_2) и

$$Г_{п_1} + Г_1 + Г_2 + Г_3 = Г_п + (2r_1 + 2r_2 + 4) + (q_1 + q_2 + q_3 + 3)$$

(число 4 означает узлы в вершинах малого прямоугольника, число 3 — узлы в вершинах треугольника $A_1A_2A_3$). Тогда

$$S = В + (q_1 + q_2 + q_3) + (r_1 + r_2) + 1 + \frac{Г_п - (Г_п + (2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 4) + (q_1 + q_2 + q_3 + 3))}{2} + 3, \qquad (8)$$

или

$$S = В + \frac{q_1 + q_2 + q_3 - 5}{2} + 3 = В + \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + 3) - 8}{2} + 3 = В + \frac{Г}{2} - 1,$$

где

$$Г = q_1 + q_2 + q_3 + 3.$$

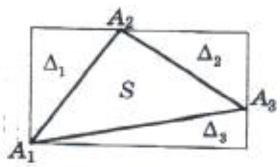


Рис. 5

Из рисунка 5 видно, что аналогом равенства (8) будет равенство

$$S = В + q_1 + q_2 + q_3 + \frac{Г_п - (Г_п + q_1 + q_2 + q_3 + 3)}{2} + 2$$

(число 3 в числителе дроби означает число узлов в вершинах треугольника $A_1A_2A_3$), откуда

$$S = В + \frac{q_1 + q_2 + q_3 - 3}{2} + 2 = В + \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + 3) - 6}{2} + 2 = В + \frac{Г}{2} - 1.$$

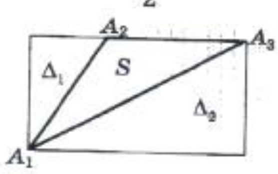


Рис. 6

Из рисунка 6 видно, что аналогом равенства (8) будет равенство

$$S = В + q_1 + q_3 + \frac{Г_п - (Г_п + q_1 + q_3 - q_2 + 1)}{2} + 1$$

(число 1 в числителе дроби означает, что узел в вершине A_1 включается дважды), откуда

$$S = В + \frac{q_1 + q_2 + q_3 - 1}{2} + 1 = В + \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + 3) - 4}{2} + 1 = В + \frac{Г}{2} - 1.$$

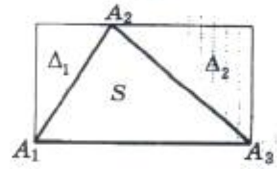


Рис. 7

Из рисунка 7 видно, что аналогом равенства (8) будет равенство

$$S = В + q_1 + q_2 + \frac{Г_п - (Г_п - q_3 + q_1 + q_2 + 1)}{2} + 1$$

(число 1 в числителе дроби означает, что узел в вершине A_2 включается дважды), откуда

$$S = В + \frac{q_1 + q_2 + q_3 - 1}{2} + 1 = В + \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + 3) - 4}{2} + 1 = В + \frac{Г}{2} - 1.$$

Упражнение 6. Докажите формулу (*) для произвольного многоугольника.

Решение. Пусть дан произвольный N-угольник $A_1A_2...A_N$ с вершинами в узлах квадратной сетки (неважно, выпуклый он или невыпуклый). Воспользуемся методом математической индукции. Для треугольника $A_1A_2A_3$ (при $n = 3$) формула доказана (см. упражнения 2, 4 и 5).

Допустим, что формула (*) верна для всех $n < N$ ($n \ge 4$). Разобьем N-угольник диагональю A_KA_N на два многоугольника: $A_1A_2...A_KA_N$ и $A_NA_K...A_{N-1}$. Обозначим соответственно через S_1 и S_2 площади этих многоугольников, через $В_1$ и $В_2$ — число их внутренних узлов, через $Г_1$ и $Г_2$ — число узлов на границе и через p ($p \ge 0$) — число внутренних узлов диагонали A_KA_N.

Тогда

$$S_1 = В_1 + \frac{Г_1}{2} - 1,\ S_2 = В_2 + \frac{Г_2}{2} - 1.$$

Отсюда

$$В = В_1 + В_2 + p,\ Г = Г_1 + Г_2 - 2p - 2$$

(так как узлы диагонали A_KA_N дважды включаются к границам $Г_1$ и $Г_2$) и

$$S = S_1 + S_2 = В_1 + В_2 + \frac{Г_1 + Г_2}{2} - 2 = (В - p) + \frac{Г + 2p + 2}{2} - 2 = В + \frac{Г}{2} - 1.$$

Таким образом, условия метода математической индукции выполнены и формула (*) верна для любого N-угольника.

Формула Пика доказана.

Пример. Вычислите площадь многоугольника, изображенного на рисунке 8.

Рис. 8

Решение. В = 10, Г = 9, по формуле (*) имеем:

$$S = 10 + \frac{9}{2} - 1 = 13{,}5.$$

Ответ: 13,5 кв. ед.

Я привел авторское доказательство формулы Пика, считаю, что оно простое и доступное. Приведенное доказательство представляет интерес для творчески работающего учителя, так как творчество — это поиск нового.

ЕГЭ содержит задания на вычисление площади многоугольника с вершинами в узлах квадратной сетки. В связи с этим, учащихся 10–11-х классов на элективных занятиях можно ознакомить с приведенным доказательством формулы Пика и применением ее для вычисления площадей в заданиях ЕГЭ. Формула Пика быстро приводит к цели.

Литература

Сефибеков С.Р. Доказываем формулу Пика// Математика . №9, 2020.-С. 12-14, 22