

Тема урока:

# **Сумма $n$ -первых членов арифметической прогрессии**

Преподаватель математики:  
Терещенкова Е.В.

## **Цель урока:**

- **Вывести формулу суммы  $n$ -членов арифметической прогрессии, выработать навыки непосредственного применения данной формулы.**

## **Задачи урока:**

- *Учебная: познакомить учащихся с формулой суммы  $n$ -первых членов арифметической прогрессии.*
- *Воспитательная: воспитывать интерес к истории математики.*
- *Развивающая: развивать любознательность и вычислительные навыки.*

# Арифметический диктант:

1. У арифметической прогрессии первый член 4 (6), второй 6 (4). Найти разность  $d$ .
2. У арифметической прогрессии первый член 6 (4), второй 2 (6). Найти третий член.
3. Найти десятый (восьмой) член арифметической прогрессии, если ее первый член равен 1, а разность  $d$  равна 4 (5).
4. Является ли последовательность четных (нечетных) чисел арифметической прогрессией?
5.  $(a_n)$  – арифметическая прогрессия. Выразите через  $a_1$  и  $d$   $a_{10}$ ;  $a_{100}$ ;  $a_n$ ;  $a_{n+1}$  ( $a_{20}$ ;  $a_{200}$ ;  $a_{2n}$ ;  $a_{2n+2}$ ).
6. Определение арифметической прогрессии. Понятие разности арифметической прогрессии. Вывод формулы  $n$ -го члена арифметической прогрессии.

# Проверь себя!

- 1 вариант: (1)  $d = 2$ ; (2)  $a_3 = -2$ ; (3) 37; (4) Да; (5)  $a_{10} = a_1 + 9d$ ;  $a_{100} = a_1 + 99d$ ;  $a_n = a_1 + d(n - 1)$ ;  $a_{n+1} = a_1 + nd$ .
- 2 вариант (1)  $d = -2$ ; (2)  $a_3 = 8$ ; (3)  $a_8 = 36$ ; (4) Да; (5)  $a_{20} = a_1 + 19d$ ;  $a_{200} = a_1 + 199d$ ;  $a_{2n} = a_1 + d(2n - 1)$ .
- (6) Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом. Разность между любым ее членом, начиная со второго и предыдущим членом равна разности арифметической прогрессии.

## *Из истории математики:*

С формулой суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии был связан эпизод из жизни немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777 – 1855).





Когда ему было 9 лет, учитель, занятый проверкой работ учеников других классов, задал на уроке следующую задачу:

«Сосчитать сумму натуральных чисел от 1 до 40 включительно:  $1 + 2 + 3 + \dots + 40$ .

Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: «Я уже решил...»

Большинство учеников после долгих подсчетов получили неверный результат. В тетради Гаусса было написано одно число и притом верное.



*Как Гауссу удалось  
так быстро  
сосчитать сумму  
такого большого  
количества чисел?*



**Попытаемся найти  
ответ на данный  
вопрос.**



Вот схема рассуждений Гаусса.

Сумма чисел в каждой паре 41. Таких пар 20, поэтому искомая сумма равна

$$41 \times 20 = 820.$$

Попытаемся понять как ему это удалось.

Выведем формулу суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии.

$a_n$ ) – арифметическая прогрессия.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots = a_2 + a_1$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n,$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n \text{ и т.д.}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n.$$

$S_n = (a_1 + a_n)n : 2$  – **формула суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии.**

$$S_n = (a_1 + a_n)n : 2, \quad a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$S_n = (a_1 + a_1 + d(n-1))n : 2 = (2a_1 + d(n - 1))n : 2$$

$S_n = (2a_1 + d(n - 1))n : 2$  – **формула суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии.**



***А теперь подобно Гауссу  
решим задачу о нахождении  
суммы натуральных чисел от  
1 до 40.***

## Тренировочные упражнения:

1.  $(a_n)$  –  
арифметическая  
прогрессия.

$a_1 = 6$ ,  $a_5 = 26$ . Найти  
 $S_5$ .

**Решение:**

$$S_n = (a_1 + a_5) : 2 \times 5$$

**Теперь вычислим сумму пяти  
первых членов арифметической  
прогрессии:  $S_5 = (6 + 26) : 2 \times$   
 $5 = 80$ .**

**Ответ: 80.**

**2.  $(a_n)$  – арифметическая прогрессия.**

**$a_1 = 12, d = -3$ . Найти  $S_{16}$ .**

**Решение:**

$$S_{16} = (a_1 + a_{16}) : 2 \times 16$$

**Заметим, что в данной прогрессии не задан последний член этой суммы. Найдем 16 член прогрессии:**

$$a_{16} = 12 + 15 \times (-3) = 12 + (-45) = -33$$

**Теперь вычислим сумму:  $S_{16} = (12 + (-33)) \times 16 : 2 = (-21) \times 8 = -168$ . Ответ: -168.**

**При решении таких задач можно воспользоваться второй формулой**

$$S_{16} = (2a_1 + d(n - 1)) : 2 \times 16 = (2 \times 12 + 15 \times (-3)) : 2 \times 16 = -21 : 2 \times 16 = -168. \text{ Ответ: } -168.$$



***Работа по учебнику.***



В заключение вспомним строки А. С. Пушкина из романа «Евгений Онегин», сказанные о его герое: «...не мог он ямба от хорея, как мы не бились, отличить». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха. Ямб – стихотворный метр с ударениями на четных слогах стиха (Мой дядя самых честных правил...), то есть ударными являются 2-й, 4-й, 6-й, 8-й и т. д. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и с разностью, равной двум: 2, 4, 6, 8, ... Хорей – стихотворный размер с ударением на нечетных слогах стиха. (Буря мглою небо кроет...) Номера ударных слогов также образуют арифметическую прогрессию, но ее первый член равен единице, а разность по-прежнему равна двум: 1, 3, 5, 7, ... .

## *Задание на дом:*

1. Найдите сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, в которой  $a_1 = 6$ ,  $d = 4$ .
2. Найдите сумму первых  $n$  – членов арифметической прогрессии,  $1,6; 1,4; \dots$ , если  $n = 6$ .
3. Найти сумму натуральных чисел начиная с 20 по 110 включительно.
4. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии  $(a_n)$ , в которой  $a_1 = 6$ ,  $a_7 = 26$ .