

Научно-исследовательская работа

Математика

**ТЕМА РАБОТЫ: “ФРАКТАЛ - МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БЕСКОНЕЧНОСТЬ”**

Выполнил(а):

Леухина Анастасия Артемовна

учащаяся 9 класса

МОУ СОШ пос. МИС

Платова Олеся Сергеевна

учащаяся 9 класса

МОУ СОШ пос. МИС

Руководитель:

Левчегова Марина Михайловна

учитель математики и информатики

МОУ СОШ пос. МИС

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	5
1.1. Понятие фрактала.....	5
1.2. Классификация фракталов	6
1.3. Кривая Коха	8
1.4. Треугольник Серпинского.....	9
1.5. Дерево Пифагора.....	10
ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	12
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	16
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	17
ПРИЛОЖЕНИЕ	18

ВВЕДЕНИЕ

Природа – это величайший архитектор, инженер и строитель. В ней все подчиняется закономерностям и, если человек их не видит, это вовсе не означает, что их не существует. Может, стоит их искать в других плоскостях и масштабах? Одной из природных закономерностей является фрактал. Это понятие появилось в XX веке, с развитием фрактальной геометрии. Эта наука создана для исследования всего неровного, кривого и шершавого, то есть всего того, что нас окружает.

До начала 20 века фракталы и автоподобные фигуры совершенно не изучались. Считалось, что они не являются полноправными математическими объектами, и поэтому их изучение отбрасывалось. Но идеи изучения автоподобных фигур были развиты Б. Мандельбротом. Он же в 1975 году ввёл слово «фрактал» (от латинского fractus, от которого позднее произошли английские термины fraction, fractional – дробь, дробный).

Данная тема сегодня очень **актуальна**, поскольку в современной математике развивается новый раздел – фрактальная геометрия. Фракталы успели занять полноправное место не только в математике, но и в других областях науки, а красивые рисунки, выполненные с помощью компьютерной графики, привлекают к ним даже людей, далёких от науки. Обнаруживается самоподобие и в природе: например, в организме человека каждый нерв подобен другому, альвеолы лёгких подобны друг другу, клетки ткани также подобны одна другой. Автоподобные фигуры применяют и в технике.

Эта работа призвана дать представление о фракталах и автоподобных фигурах, а также об их роли в современной математике и других областях науки.

Цель данной исследовательской работы – рассмотреть виды фракталов и их межпредметную интеграцию.

Задачи исследования:

1. Познакомиться с историей возникновения и развития фрактальной геометрии;
2. Изучить виды фракталов;
3. Рассмотреть связь между биологией и геометрией;
4. Создать исследовательскую работу о фракталах;
5. Создать памятку “Фракталы в биологии”.

Гипотеза исследования заключается в том, что самоподобные фигуры (фракталы) встречаются и в математике, и в биологии.

Объектная область исследования – фрактальная геометрия.

Объект исследования – фракталы.

Предмет исследования – связь геометрии и биологии.

Методы исследования: изучение и анализ теоретических сведений по данному вопросу, опрос обучающихся, создание брошюры.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Понятие фрактала

До недавнего времени геометрические модели природных объектов строились на основе сравнительно простых фигур: прямых, прямоугольников, окружностей, сфер, многогранников. Однако, этот набор, как не сложно заметить, трудно применим для описания сложных объектов, таких как, турбулентный поток жидкости, пористые материалы, форма облаков, кровеносно-сосудистая система, крона дерева и т.д.

Поэтому необходимы были новые геометрические понятия и методы для описания этих объектов. Одним из таких понятий и явилось понятие фрактала.

Основной идеей новой геометрии является идея самоподобия. Т.е. фрактальные структуры при различном увеличении не претерпевают в среднем значительных изменений. Например, у дерева есть ветви. На этих ветвях есть ветви поменьше и т.д. То же самое можно заметить, рассматривая горный рельеф, кровеносную систему человека и др. Сейчас очевидно, что с помощью евклидовой геометрии сложно описывать природные объекты, т.к. в ней отсутствует некоторая нерегулярность, беспорядок. В таких случаях и применяется теория фракталов. Фракталы используются при создании изображений деревьев, горных ландшафтов, облаков; при анализе сигналов сложной формы; во многих областях в физики, химии, биологии.

В отличие от евклидовой геометрии, которая рассматривает гладкие объекты, фрактальная геометрия рассматривает нерегулярные, сильно изломанные, изрезанные объекты. Для фрактальных кривых не существует понятия касательной, т.к. эти кривые в общем случае недифференцируемые.

Самоподобие является одним из определяющих свойств фрактала. Другим из таких свойств является дробная размерность. Отсюда и происхождение слова фрактал.

Когда большинству людей казалось, что геометрия в природе ограничивается такими простыми фигурами, как линия, круг, коническое сечение, многоугольник, сфера, квадратичная поверхность, а также их комбинациями. К примеру, что может быть красивее утверждения о том, что планеты в нашей солнечной системе движутся вокруг солнца по эллиптическим орбитам. Однако многие природные системы настолько сложны и нерегулярны, что использование только знакомых объектов классической геометрии для их моделирования представляется безнадежным. Как, к примеру, построить модель горного хребта или кроны дерева в терминах геометрии. Как описать то многообразие биологических конфигураций, которое мы наблюдаем в мире растений и животных. Представьте себе всю сложность системы

кровообращения, состоящей из множества капилляров и сосудов и доставляющей кровь к каждой клеточке человеческого тела. Представьте, как хитроумно устроены легкие и почки, напоминающие по структуре деревья с ветвистой кроной.

Столь же сложной и нерегулярной может быть и динамика реальных природных систем. Как подступиться к моделированию каскадных водопадов или турбулентных процессов, определяющих погоду. Фракталы и математический хаос - подходящие средства для исследования поставленных вопросов.

Так что же такое фрактал? Парадоксально, но общепринятого точного определения этого понятия не существует. С математической точки зрения фрактал - это, прежде всего, множество с дробной размерностью.

Фрактал по первому определению - это множество, хаусдорфова размерность которого превосходит его топологическую размерность.

По второму определению фрактал — это геометрическая структура, части фрагменты которой в какой-то мере подобны самой структуре.

Можно также сказать, что математическое понятие фрактала выделяет объекты, обладающие структурами различных масштабов, как больших, так и малых, и, таким образом, отражает иерархический принцип организации материи в природе. В основе этого понятия содержится одна важная идеализация действительности: фрактальные объекты самоподобны, т.е. их вид не претерпевает существенных изменений при разглядывании их в микроскоп с любым увеличением.

1.2. Классификация фракталов

Как и все в науке, фракталы принято делить на классы или виды. Каждый вид имеет свое особое происхождение.

Одной из общепринятых классификаций является классификация фракталов на геометрические, алгебраические и стохастические (рис. 1).



Рис. 1. Классификация фракталов

Давайте остановимся на *геометрических фракталах* и их связи с объектами природы.

Именно с геометрических фракталов и начиналась история автоподобных фигур. Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений. С каждым шагом фигура будет становиться все сложнее и сложнее, и если мы проведем (по крайней мере, в уме) бесконечное количество преобразований - получим геометрический фрактал. Геометрические фракталы являются также самыми наглядными, т.к. сразу видна самоподобность.

Мы привели несколько наглядных примеров фракталов таких как: снежинка Коха, треугольник Серпинского, Дерево Пифагора. Все они получены путем повторений определенной последовательности геометрических построений с использованием точек и линий.

На самом деле фрактальные свойства имеет очень большое количество природных объектов—просто мало кто об этом задумывается. Вы можете любоваться облаками на небе, набегаящими волнами прибоя, ходить по лесу— и даже не подозревать, что в основе этой красоты лежит математика. Несмотря на всю сложность природных объектов, многие из них в принципе описываются довольно простыми математическими формулами. Хотя в чистом виде фракталы в природе не существуют.

В графике использование геометрических фракталов необходимо при получении биологических изображений.

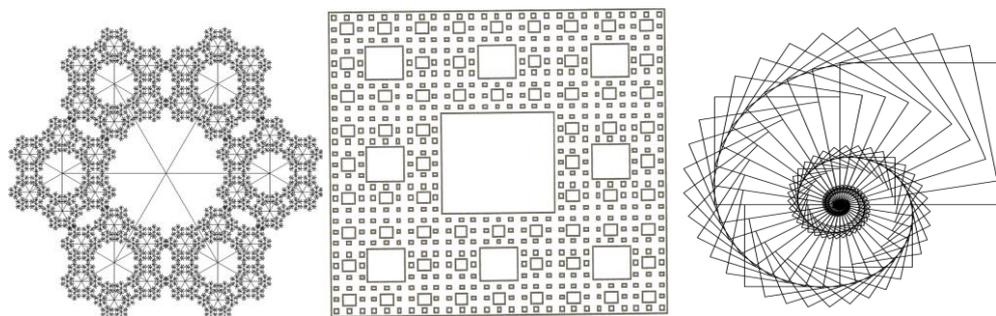


Рис. 2. Примеры фракталов

Природные фракталы

Почти все природные образования: кроны деревьев, облака, горы, береговые линии имеют фрактальную структуру.

Что это значит?

Если посмотреть на фрактальный объект в целом, затем на его часть в увеличенном масштабе, потом на часть этой части, то нетрудно увидеть, что они выглядят одинаково.

Мало кто обращает внимание, но эти удивительные фигуры присутствуют повсюду. **Природа** создана из самоподобных фигур, просто мы этого не замечаем. Достаточно посмотреть через увеличительное стекло на нашу кожу

или листок дерева, и мы увидим фракталы. Или взять, к примеру, ананас или даже хвост павлина – они состоят из подобных фигур. А сорт капусты брокколи Романеско вообще поражает своим видом, ведь это поистине можно назвать чудом природы. Даже на обычной снежинке мы можем увидеть все прелести фракталов.

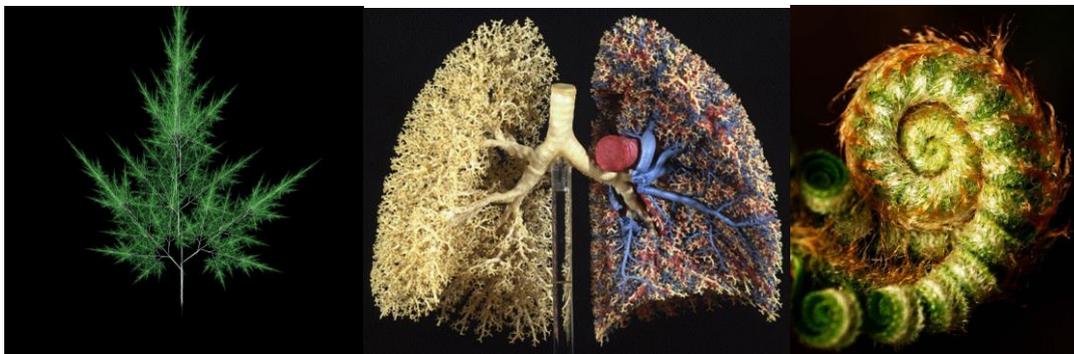


Рис. 3. Фракталы в биологии

1.3. Кривая Коха

Кривая Коха один из самых типичных геометрических фракталов. Она была изобретена в девятнадцатом веке (1904 г.) немецким математиком по имени Хельге фон Кох, который, изучая работы Георга Контора и Карла Вейерштрассе, натолкнулся на описания некоторых странных кривых с необычным поведением. Инициатор — прямая линия. Генератор — равносторонний треугольник, стороны которого равны трети длины большего отрезка. Эти треугольники добавляются к середине каждого сегмента снова и снова. В своем исследовании, Мандельброт много экспериментировал с кривыми Коха, и получил фигуры такие как Острова Коха, Кресты Коха, Снежинки Коха и даже трехмерные представления кривой Коха, используя тетраэдр и прибавляя меньшие по размерам тетраэдры к каждой его грани. Кривая Коха имеет размерность 1.261859507

Кривая Коха примечательна тем, что нигде не имеет касательной, т. е. нигде не дифференцируема, хотя всюду непрерывна.

Три копии кривой Коха, построенные (остриями наружу) на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, называемую снежинкой Коха.

Для построения снежинки Коха выполним следующие операции. Рассмотрим равносторонний треугольник. Затем каждую из сторон этого треугольника разделим на три равные части, берем среднюю часть и в середине построим равносторонний треугольник так, как изображено на рисунке 6.

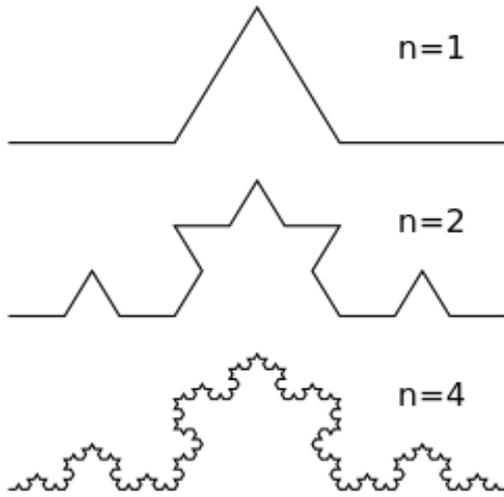


Рис. 4. Снежинка Коха



Рис. 5. Снежинка

На следующем шаге такой же процедуре деления на три равные части и достраивания равностороннего треугольника подвергается каждая из сторон новой фигуры, и так до бесконечности. В результате возникает симметричная, похожая на снежинку, бесконечно изломанная кривая, которая представляет собой самоподобное множество, называемое снежинкой Коха.

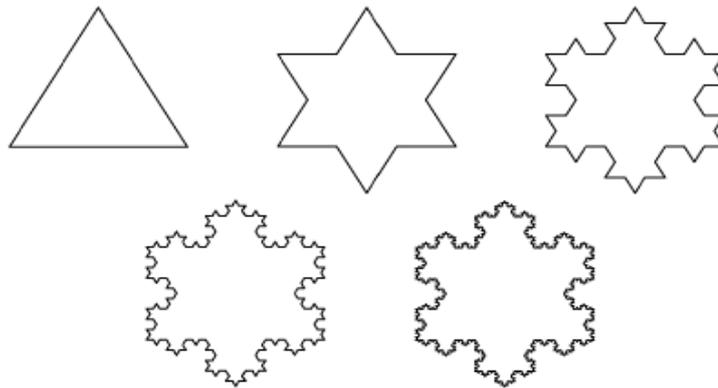


Рис. 6. Построение снежинки Коха

В живой природе мы можем увидеть Снежинку Коху, в виде: крон деревьев, побережья, облаков. Зимой, когда идет снег, мы можем рассмотреть снежинки, которые похожи на кривого Коха. Также можно заметить ее в системе кровообращения.

1.4. Треугольник Серпинского

Этот фрактал описал в 1915 году польский математик Вацлав Серпинский. Чтобы его получить, нужно взять (равносторонний) треугольник с внутренностью, провести в нём средние линии и выкинуть центральный из четырех образовавшихся маленьких треугольников.

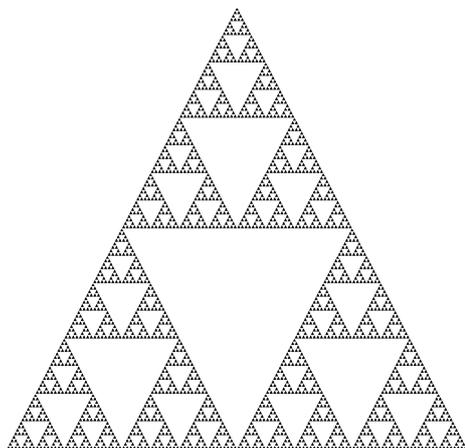


Рис. 7. Треугольник Серпинского



Рис. 8. Папоротник

Дальше эти же действия нужно повторить с каждым из оставшихся трех треугольников, и т. д. На рисунке показаны первые три шага.

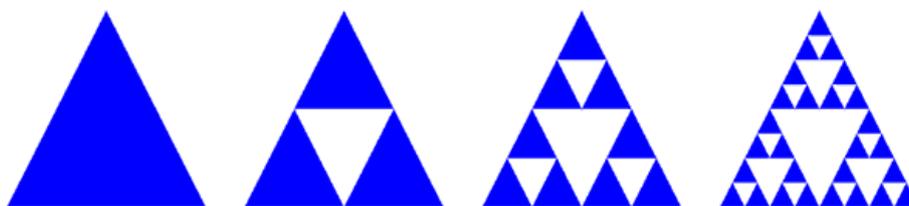


Рис. 9. Построение треугольника Серпинского

Исключение центральных треугольников — не единственный способ получить в итоге треугольник Серпинского. Можно двигаться «в обратном направлении»: взять изначально «пустой» треугольник, затем достроить в нём треугольник, образованный средними линиями, затем в каждом из трех угловых треугольников сделать то же самое, и т. д. Поначалу фигуры будут сильно отличаться, но с ростом номера итерации они будут всё больше походить друг на друга, а в пределе совпадут.

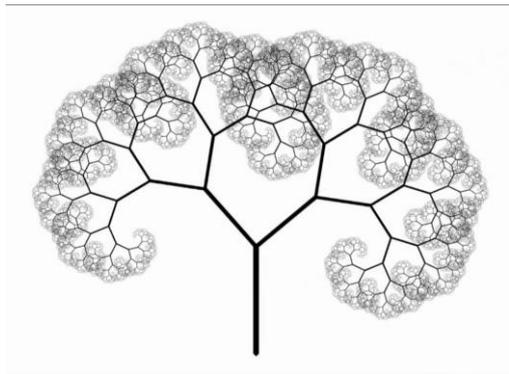
1.5. Дерево Пифагора

Дерево Пифагора — разновидность фрактала, основанная на фигуре, известной как «Пифагоровы штаны».

Пифагор, доказывая свою знаменитую теорему, построил фигуру, где на сторонах прямоугольного треугольника расположены квадраты. В наш век эта фигура Пифагора выросла в целое дерево. Впервые дерево Пифагора построил А. Е. Босман (1891—1961) во время второй мировой войны, используя обычную чертёжную линейку. Одним из свойств дерева Пифагора является то, что, если

площадь первого квадрата равна единице, то на каждом уровне сумма площадей квадратов тоже будет равна единице.

Если в классическом дереве Пифагора угол равен 45 градусам, то также можно построить и обобщённое дерево Пифагора при использовании других углов. Такое дерево часто называют «обдуваемое ветром дерево Пифагора». А рисуя вместо



квадратов линии, можно получать картинки, очень похожие на настоящие деревья.

Примеры

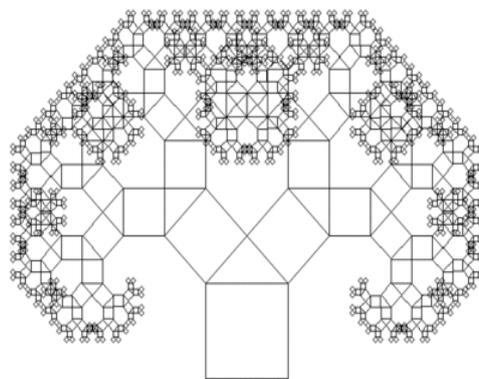
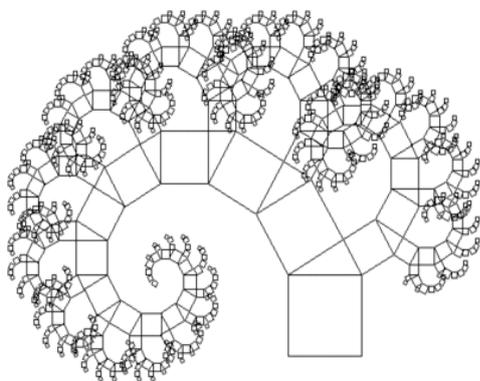


Рис. 10. Обдуваемое Ветром Дерево Пифагора

Рис. 11. Обыкновенное Дерево Пифагора

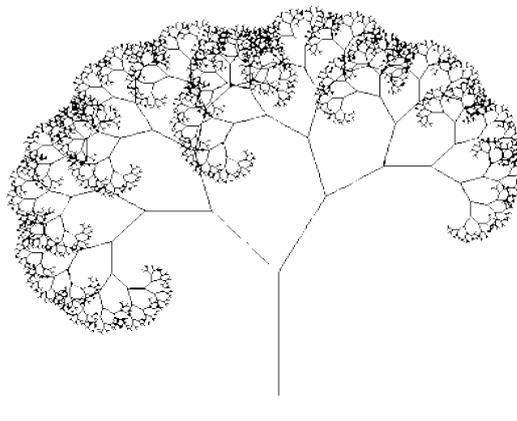
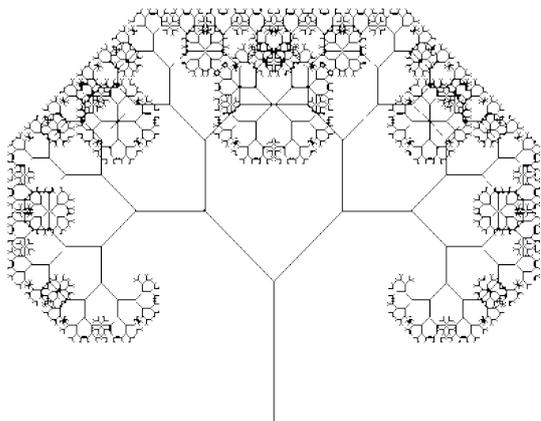


Рис. 12. Обнаженное дерево Пифагора

Рис. 13. Обнаженное обдуваемое ветром дерево Пифагора

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Этапы работы над исследовательским проектом:

1. Этап. Теоретическое исследование.

- 1) История возникновения фракталов.
- 2) Классификация фракталов.
- 3) Связь геометрии и биологии.
- 4) Исследование известных фракталов.

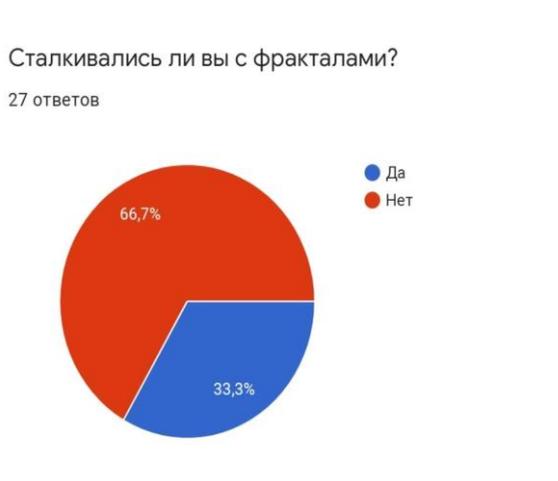
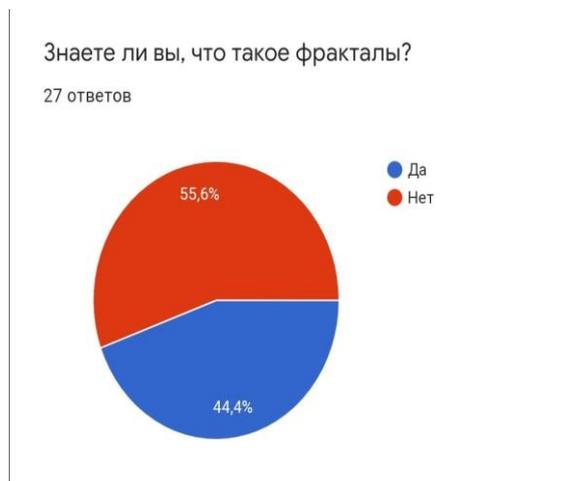
2. Этап. Опрос обучающихся.

Проверка знаний обучающейся 7-11 классом с понятием фрактал.

Углубившись в тему нашего проекта “Фрактал - математическая бесконечность”, мы решили провести социальный опрос (приложение 1) знакомо ли обучающейся 7-11 классом с понятием фрактал, автоподобие, встречали ли они природе фрактальные фигуры, задумывались о том, что геометрия и биология связаны между собой.

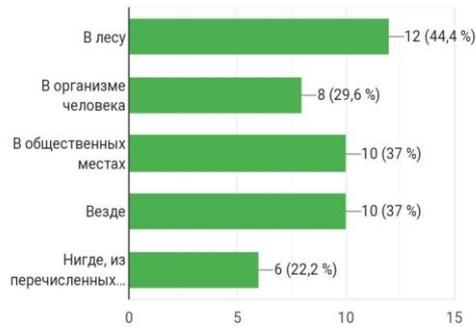
Проанализировав результаты опроса, мы получили следующие результаты.

По результату опроса мы видим, что обучающийся имеют некие представлений о фракталах, но большинство людей, даже не имеют представления о понятии и процессе их создания, и не догадываются что фракталы связаны с геометрией.



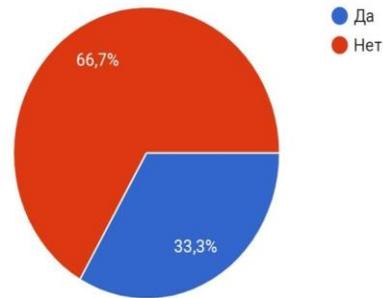
Где модно встретить самоподобные фигуры?

27 ответов



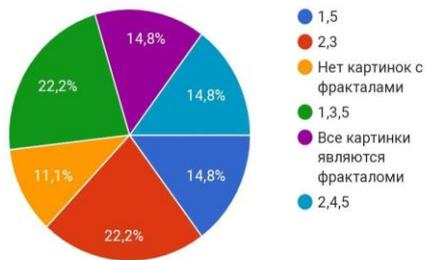
Есть ли связь между геометрией и биологией?

27 ответов

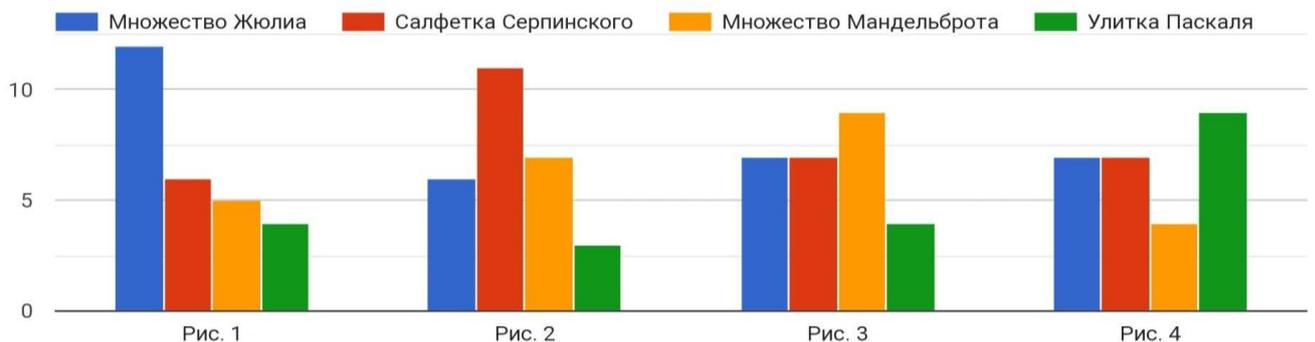


Выберете из представленных картинок фракталы.

27 ответов



Соотнесите картинки фракталов с их названиями.



3. Этап. Разработка памятки «Фракталы в биологии».

Для того чтобы ребята лучше представляли себе, что такое фрактал мы подготовили для них специальную памятку, в которой привели несколько примеров чтобы у них было наглядное представление фракталов в биологии.

Памятка «Фракталы в биологии»

Картинки	Описание картинок - как фракталы
	<p>Рассмотрим фотографию, на которой изображены грибы. Эти грибы мы можем представить в виде фракталов, а именно Дерево Пифагора.</p>
	<p>Сеть паука имеет строго определенное число радиусов и спиралей клейких нитей и постоянное расстояние между соседними витками.</p>
	<p>Даже в космосе мы можем увидеть фракталы. Млечный путь похож на улитку Паскаля.</p>
	<p>В подводном мире: растения и животные являются автоподобными. На данной картинке мы видим водоросли, которые похожи на Дерево Пифагора.</p>



На этой картинке мы можем рассмотреть два нам уже известных фрактала. А именно Кривая Коха и улитка Паскаля.



Некоторые явления природы напоминают нам автоподобные фигуры.



Фрукты и Овощи тоже являются фракталами. На примере этих чешуек ананасов, мы можем увидеть их в треугольнике Серпинского.



Структура ДНК представляет собой две антипараллельных цепочки, закрученные в спираль.



Розетка подсолнуха еще один из примеров спиралевидного фрактала. Она имеет два противоположно закрученных семейства спиралей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа по выбранной теме осуществлялась в соответствии с планом проектного исследования, а именно: были определены объектная область, объект и предмет исследования, сформулирована цель проекта, поставлены цели и задачи, а также определен ожидаемый проектный продукт. Была определена проблема, обоснована актуальность.

Анализируя выполнение поставленных задач, можно сказать следующее:

В ходе проекта мы:

1. Познакомились с историей возникновения и развития фрактальной геометрии;
2. Изучили виды фракталов;
3. Создали исследовательский проект о фракталах;
4. Разработали памятку «Фракталы в биологии», что явилось проектным продуктом.

Нами была собрана необходимая информация: с использованием сети Интернет, книг, публикаций по данной теме. Подготовлены материалы для памятки «Фракталы в биологии».

В ходе данного исследования были использованы методы: теоретические, эмпирические, математические.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Кириллов Повесть о двух фракталах — Летняя школа «Современная математика». — Дубна, 2007.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: «Институт компьютерных исследований», 2012.
3. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. — М.: «Мир», 2013.
4. Федер Е. Фракталы. — М.: «Мир», 2015.
5. Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология. — М.: изд-во МГУ, 2013.
6. Фракталы в физике. Труды 6-го международного симпозиума по фракталам в физике, 1985. — М.: «Мир», 2018.
7. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая — Ижевск: «РХД», 2015.
8. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.
9. Мандельброт Бенуа, Ричард Л. Хадсон (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах = The Misbehavior of Markets — М.: «Вильямс», 2016.
10. Балханов В.К. Введение в теорию фрактального исчисления. — Улан-Удэ: БГУ, 2016.
11. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. — М., Ижевск: РХД, 2016.
12. Галиулин Р. От мавританских орнаментов к фракталам. // Наука и жизнь, № 8, 2015.
13. Дмитриев А. Хаос, фракталы и информация. // Наука и жизнь, № 5, 2001.
14. Долбилин Н. Игра "Хаос" и фракталы. // Квант, № 2, 1997.
15. Долбилин Н. Самоподобные мозаики. // Квант, № 2, 1998.
16. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. — М., Ижевск: РХД, 2002.

ПРИЛОЖЕНИЕ

“Опрос”

Фракталы

Что такое фракталы? Связь геометрии и биологии.

 levchegova.m25@gmail.com (без совместного доступа) 
[Сменить аккаунт](#)

*** Обязательно**

Знаете ли вы, что такое фракталы? *

Да

Нет

Стакивались ли вы с фракталами? *

Да

Нет

Где модно встретить самоподобные фигуры? *

В лесу

В организме человека

В общественных местах

Везде

Нигде, из перечисленных вариантов

Есть ли связь между геометрией и биологией? *

Да

Нет

[Далее](#) [Очистить форму](#)

Фракталы

 levchegova.m25@gmail.com (без совместного доступа)
Сменить аккаунт

* Обязательно

Фракталы

Выберете из представленных картинок фрактал. *

- 1,5
- 2,3
- Нет картинок с фракталами
- 1,3,5
- Все картинки являются фракталами
- 2,4,5

Рисунок 1

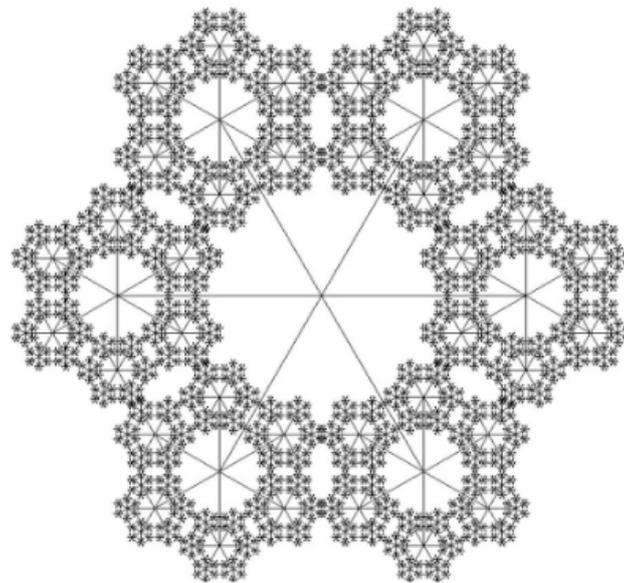


Рисунок 2



Ссылка на опрос <https://docs.google.com/forms/d/e/1>