

Использование ПО Geogebra на уроках математики

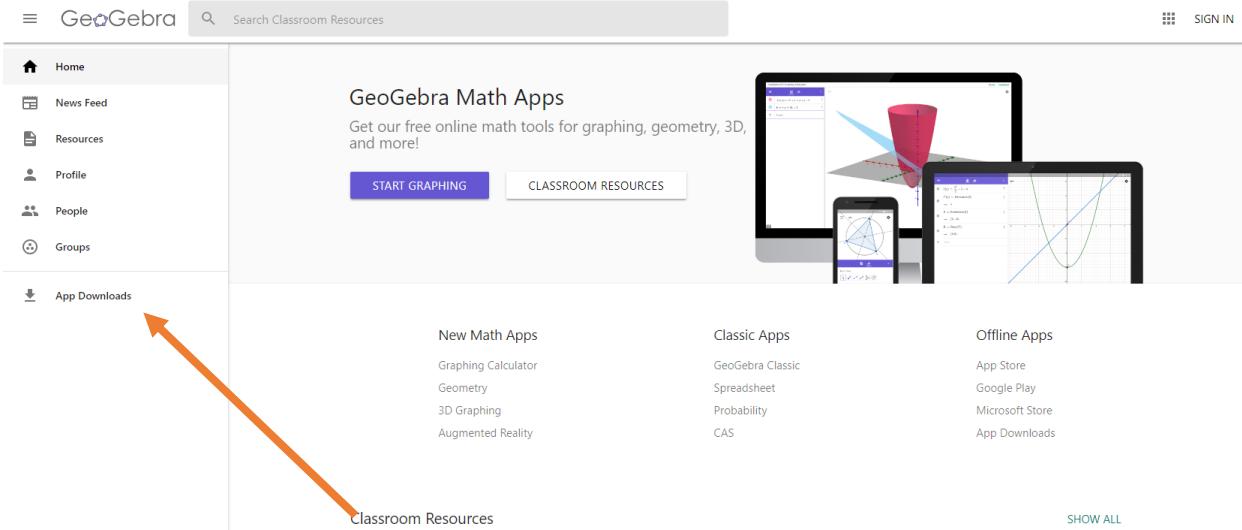
Адрес сайта: <https://www.geogebra.org/>

ГЛАВА I. ПОДГОТОВКА К РАБОТЕ С ПО GEOGEBRA

§1. Установка ПО GEOGEBRA на компьютер

GeoGebra — это бесплатная, кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете.

Для того, чтобы начать работать, сначала нужно установить программу Geogebra на компьютер. В браузере строке ввода адреса вводим ссылку на официальный сайт <https://www.geogebra.org/> и переходим в раздел AppDownloads.



GeoGebra Math Apps

Get our free online math tools for graphing, geometry, 3D, and more!

[START GRAPHING](#) [CLASSROOM RESOURCES](#)

[New Math Apps](#)

- Graphing Calculator
- Geometry
- 3D Graphing
- Augmented Reality

[Classic Apps](#)

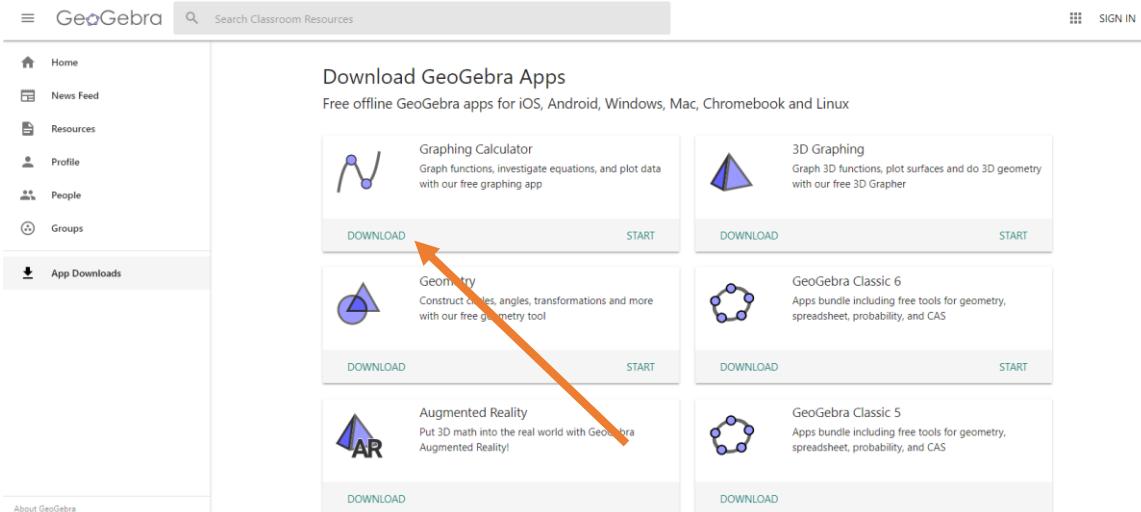
- GeoGebra Classic
- Spreadsheet
- Probability
- CAS

[Offline Apps](#)

- App Store
- Google Play
- Microsoft Store
- App Downloads

[SHOW ALL](#)

Откроется страница с различными приложениями. Выбираем Graphing Calculator и нажимаем DOWNLOAD.



Download GeoGebra Apps

Free offline GeoGebra apps for iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook and Linux

[Graphing Calculator](#) [3D Graphing](#)

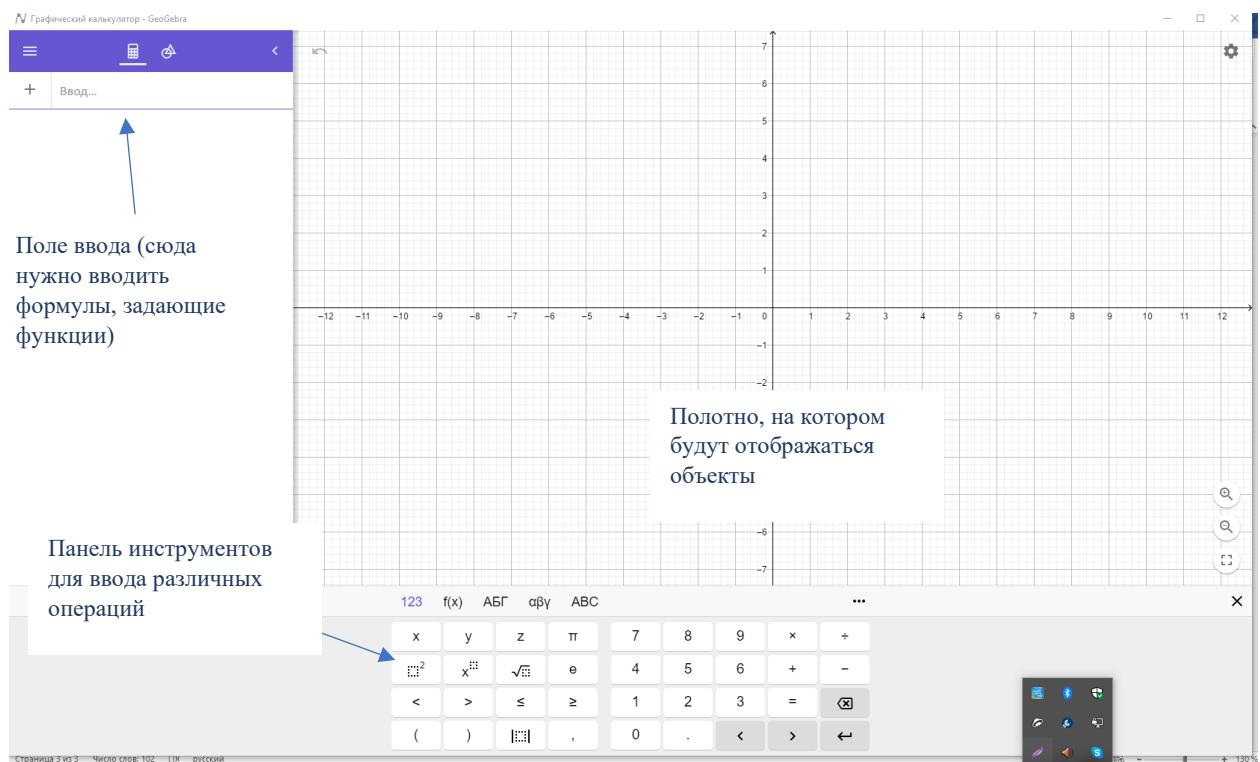
[Geometry](#) [GeoGebra Classic 6](#)

[Augmented Reality](#) [GeoGebra Classic 5](#)

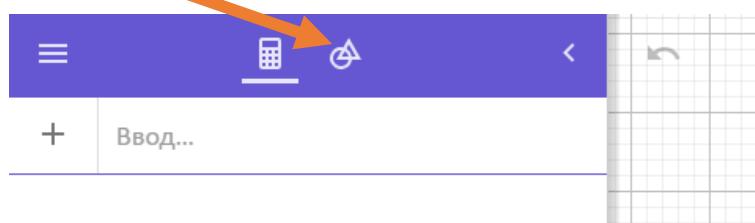
После того, как файл будет скачан, нужно будет дважды кликнуть по нему мышкой. Появится диалоговое окно, в котором мы нажимаем кнопку «Запустить». Через некоторое время откроется сама программа.

§2. Знакомство с интерфейсом ПО GEOGEBRA

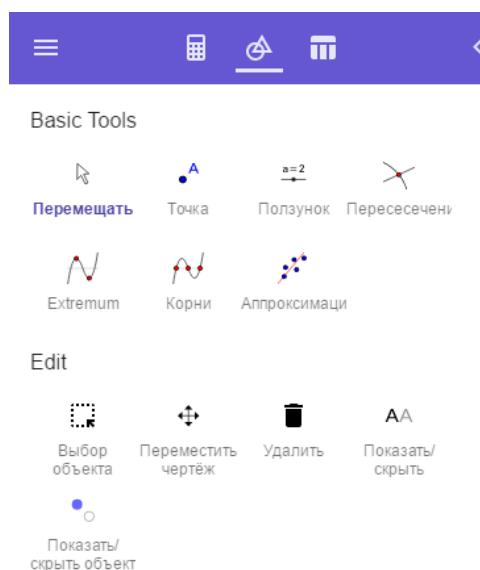
Итак, мы готовы приступить к работе. Для начала давайте разберемся с тем, что мы видим перед собой.



Для того, чтобы перейти в раздел «Геометрия» над полем ввода выбрать значок «Геометрия»



После этого слева откроется Панель инструментов «Геометрия»:



Приступим к изучению инструментов, которые мы сможем использовать на уроках геометрии. Для того, чтобы увидеть весь набор инструментов, нужно будет нажать на кнопку «More» в нижнем левом углу Панели инструментов.

Первый блок инструментов Basic Tools.

Basic Tools

Перемещать Самый важный из инструментов первого блока – инструмент «Перемещать». При помощи него можно выделять, перемещать и изменять положение объектов в координатной плоскости. Для того, чтобы выделить несколько объектов, нужно зажать клавишу CRTL и последовательно выделить необходимые объекты.

Точка Инструмент «Точка» позволяет в координатной плоскости построить точку. Точка будет обозначаться заглавной латинской буквой.

Ползунок Инструмент «Ползунок» задает параметр, и границы его изменения. Этот инструмент позволяет создавать анимированные объекты и показывает, как будет изменяться положение объектов в системе координат в зависимости, от заданного параметра.

Пересечение Инструмент «Пересечение» позволяет построить точку пересечения двух объектов. Для того, чтобы построить точку пересечения двух объектов, необходимо выбрать инструмент «Пересечение», а затем последовательно выбрать два объекта, точку пересечения которых нужно построить.

Блок Lines

Lines

Основными инструментами, которыми мы будем пользоваться в блоке Lines , являются «Отрезок», «Прямая», «Луч» и «Вектор».

Отрезок Инструмент «Отрезок» позволяет построить отрезок по двум точкам. Для того, чтобы построить отрезок, необходимо

- выбрать инструмент «Отрезок»
- отметить две точки в координатной плоскости.



Прямая

Инструмент «**Прямая**» позволяет в координатной плоскости построить прямую. Для того, чтобы построить прямую, необходимо

- выбрать инструмент «Прямая»
- отметить две точки в координатной плоскости.



Луч

Инструмент «**Луч**» позволяет в координатной плоскости построить луч. Для того, чтобы построить луч, необходимо

- выбрать инструмент «Луч»
- отметить первую точку
- отметить вторую точку, выбрав направление луча



Вектор

Инструмент «**Вектор**» позволяет в координатной плоскости построить вектор. Для того, чтобы построить вектор, необходимо

- выбрать инструмент «Вектор»
- отметить первую точку
- отметить вторую точку, выбрав направление вектора

Блок Polygons

Polygons



Многоугольни



Правильный многоугольник



Векторный многоугольник



Жёсткий многоугольник

Этот блок содержит инструменты, которые позволяют строить многоугольники.



Многоугольни

Инструмент «**Многоугольник**» позволяет построить произвольный многоугольник. Для того, чтобы построить многоугольник необходимо

- выбрать инструмент «Многоугольник»
- отметить первую точку
- последовательно отметить нужное количество точек
- вернуться к первой точке и мышкой указать на нее. Таким образом, завершить построение



Правильный многоугольник

Инструмент «**Правильный многоугольник**» позволяет построить правильный многоугольник. Для того, чтобы построить правильный многоугольник необходимо

- выбрать инструмент «Правильный многоугольник»
- отметить первую точку
- отметить вторую точку
- в открывшемся окне ввести нужное количество вершин правильного многоугольника

Блок Circles

Circles



Данный блок позволяет различными способами построить окружности.



Окружность по центру и

«Окружность по центру и точке». Чтобы построить окружность необходимо:

- выбрать инструмент «Окружность по центру и точке»
- отметить центр окружности
- отметить произвольным точку, лежащую на окружности.



Окружность по центру и

«Окружность по центру и радиусу». Чтобы построить окружность по центру и радиусу необходимо:

- выбрать инструмент «Окружность по центру и радиусу»
- отметить центр окружности



Окружность по трём

«Окружность по трем точкам». Чтобы построить окружность по трем точкам, необходимо:

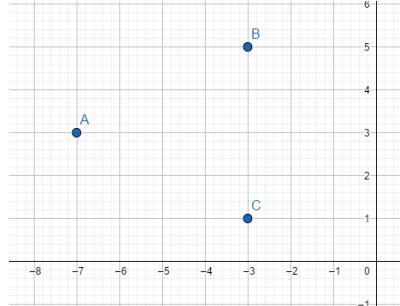
- выбрать инструмент «Окружность»
- отметить последовательно три точки, через которые будет проходить окружность.

ГЛАВА II. ПРОСТЕЙШИЕ ПОСТРОЕНИЯ В GEOGEBRA

§1. Построение плоских фигур

Задача 1.

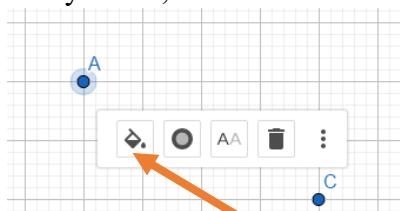
- Построить в плоскости три точки A , B и C .
- Поменять их цвета на красный, черный и зеленый соответственно.
- Выбрать инструмент «Точка»
- В координатной плоскости произвольным образом отметить точки A , B и C .



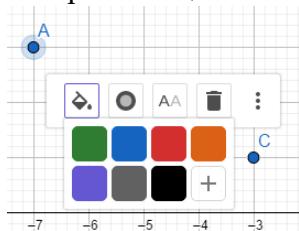
- Выбрать инструмент «Перемещение» на Панели инструментов.



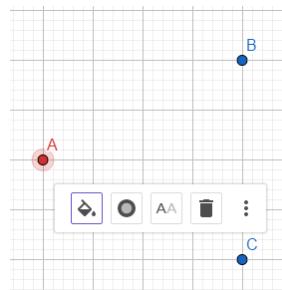
- Мышкой выделить точку A так, чтобы она была «подсвеченa»



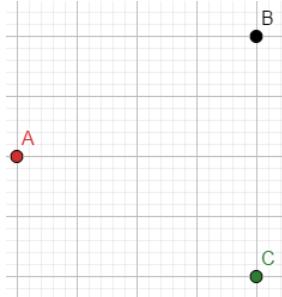
- После того, как вы выделите точку A , ниже появится небольшая панель инструментов для работы с этой точкой. Нам необходимо изменить цвет точки A на красный. Для этого необходимо нажать на инструмент «Ведро с краской». Ниже появится палитра цветов, в которой мы выбираем красный цвет.



- Итак, точка A стала красной



7. Выполните эти же действия для того, чтобы раскрасить оставшиеся точки в черный и зеленый цвета.



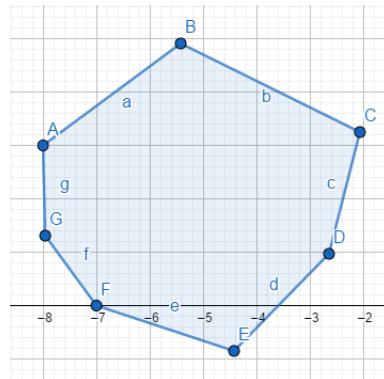
Задача 2.

- Построить произвольный восьмиугольник.
- Стороны восьмиугольника раскрасить в четыре разных цвета.
- Две стороны восьмиугольника сделать пунктирными.

Прежде, чем мы приступим к решению следующей задачи, нам необходимо расчистить место для построения. Для того, чтобы очистить координатную плоскость, можно последовательно выделять мышкой элементы и нажимать клавишу **DELETE** на клавиатуре. Но, конечно, все построения можно оставить и выполнять построения рядом.

Итак, решение.

- Выбрать элемент «Многоугольник» на Панели инструментов и выполнить построение восьмиугольника по точкам.

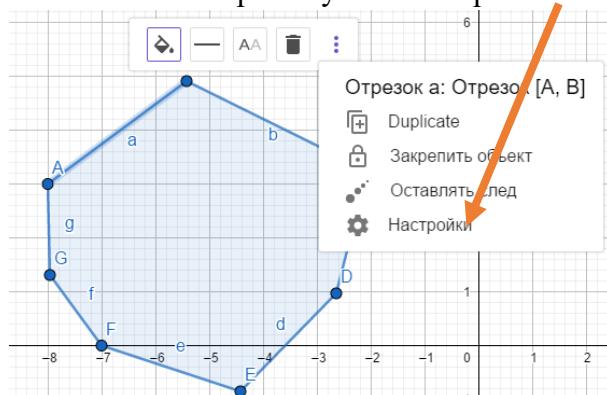
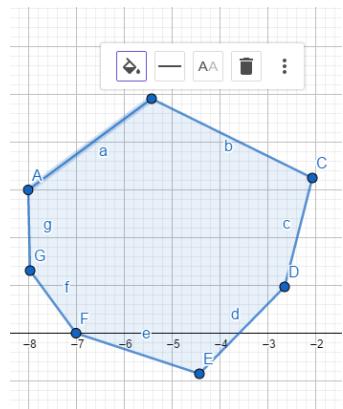


У меня получился вот такой многоугольник.

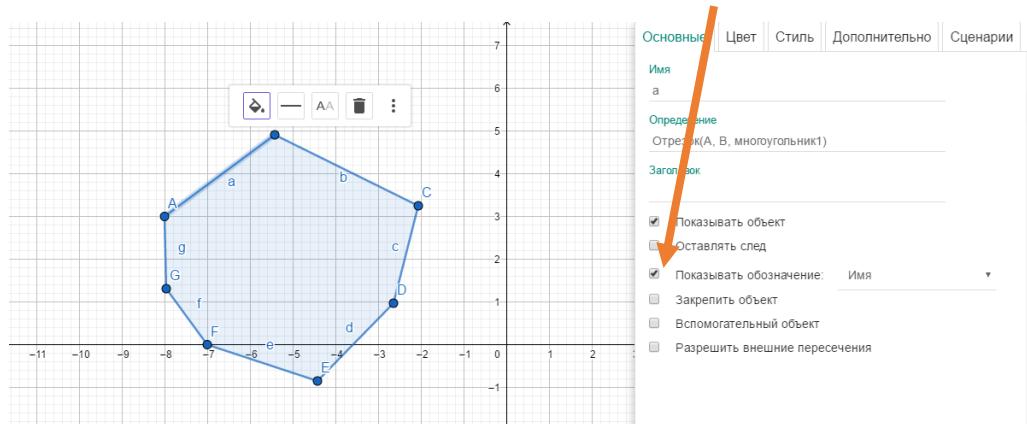
- Рассмотрите многоугольник, который получился у вас. Обратите внимание на следующие детали:

• Каждый отрезок, который является стороной многоугольника имеет два названия: первое – двумя заглавными латинскими буквами, а второе – маленькой латинской буквой. Например, на моем рисунке отрезок AB также назван просто буквой a . Иногда двойное имя каждого элемента на чертеже сильно загромождает рисунок. Однако, Geogebra дает возможность одно из названий убрать. Уберем название каждого отрезка. Для этого

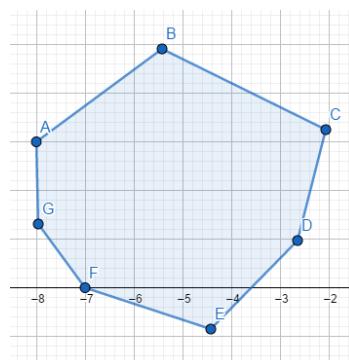
- выберем инструмент «Перемещать» и мышкой выделим отрезок a . Он должен стать подсвеченным.
- появится меню для работы с отрезком. В нем необходимо выбрать три вертикально расположенных точки
- в выпавшем меню выбрать пункт «Настройки»



- справа появится меню для работы с объектом. В этом меню нужно убрать галочку рядом со словами «Показывать обозначение»



Если вы все сделали верно, то название отрезка a исчезнет. Выполните эти действия для оставшихся отрезков. В результате получается менее нагроможденный чертеж



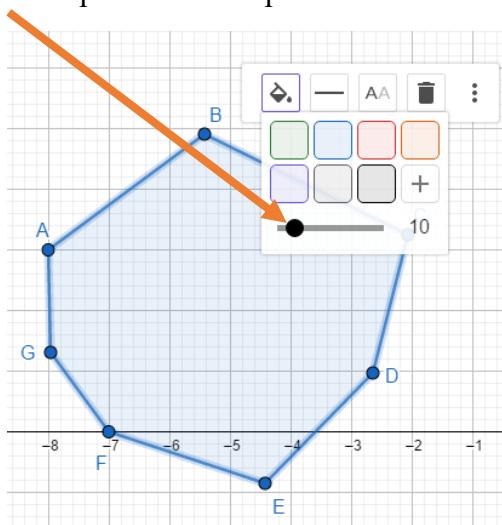
- Продолжим изучать многоугольник. Обратите внимание на расположение точек A, B, C, D, E, F и G . Точки B и C хорошо видны на рисунке. А вот расположение остальных точек не очень удобно для восприятия. Попробуем это исправить.

Для того, чтобы переместить имя точки необходимо навести курсор мыши на имя точки так, чтобы курсор принял вид «Пальца». После этого, не отпуская левую кнопку мыши переместить имя точки туда, где вы хотите, чтобы оно было. У меня в результате всех перемещений получился такой рисунок:

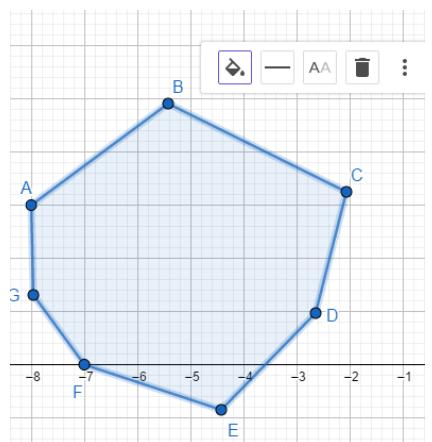
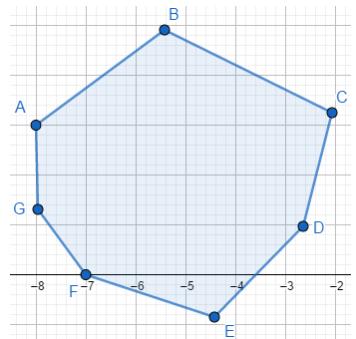
- И еще один момент, на который я бы хотела обратить ваше внимание. Если вы выполняете построение многоугольника при помощи инструмента «Многоугольник», то внутренняя область многоугольника по умолчанию будет окрашиваться в голубой цвет. Работать можно и с таким рисунком. Но будет полезно узнать и то, как внутреннюю область сделать прозрачной.

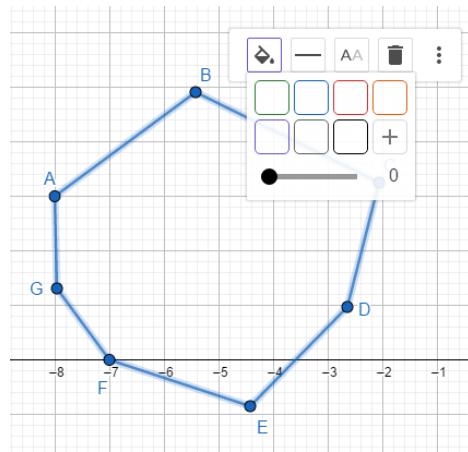
Для того, чтобы сделать внутреннюю область прозрачной, необходимо, курсор мыши поместить во внутреннюю часть многоугольника так, чтобы он принял форму «Пальца». После этого нужно один раз нажать левой кнопкой мыши на внутренней области многоугольника. Появится меню для работы с многоугольником.

В этом меню выбираем «Ведро с краской». У вас появится палитра цветов. Обратите внимание на то, что когда мы меняли цвет точки, то заливка в палитре была сплошной. Здесь же палитра полупрозрачная. Чтобы внутренняя часть многоугольника стала прозрачной, необходимо бегунок переместить в крайнее левое положение, чтобы вместо числа 10 появился 0.



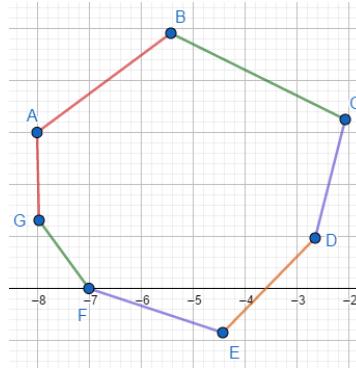
Должно получиться так



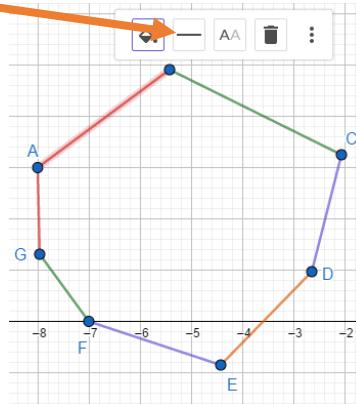


3. Продолжим решать задачу. Теперь нам необходимо раскрасить стороны в четыре различных цвета. Чтобы раскрасить стороны в различные цвета, необходимо выполнить те же действия, что и в задаче 1 б), когда мы раскрашивали точки в различные цвета. Только теперь нам необходимо будет выделять отрезки, а не точки. Попробуйте выполнить эти действия самостоятельно.

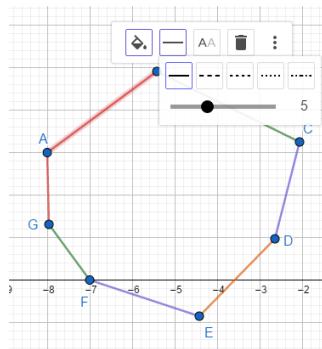
У меня получился такой многоугольник



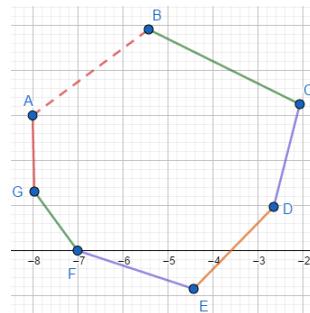
4. Далее выполним задание под буквой в). Нужно две стороны многоугольника сделать пунктирными. Для этого одним нажатием левой кнопки мыши выделим одну из сторон так, чтобы появилось вспомогательное меню для работы с отрезком. В нем находим инструмент «Стиль линии»



Нажимаем 1 раз. Появится еще одно вспомогательное меню. В нем выбираем любой тип пунктира.



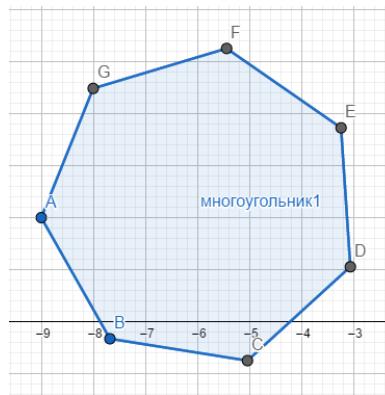
Теперь рисунок выглядит так:



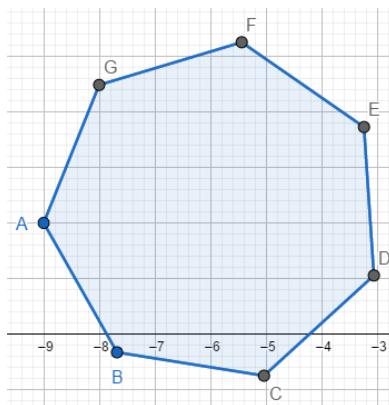
Выполните эту операцию еще для 1-2 сторон многоугольника.

Задача 3.

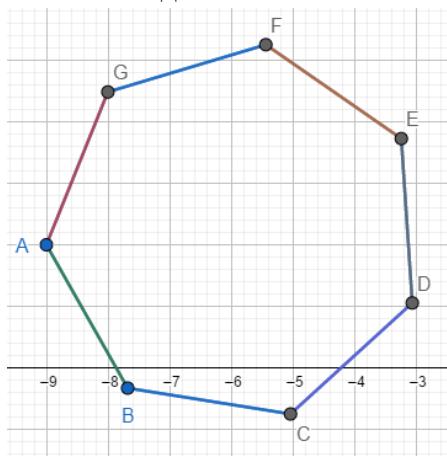
- Построить правильный семиугольник.
 - Раскрасить все стороны правильного семиугольника в разные цвета.
 - Сделать внутреннюю область правильного семиугольника невидимой.
- На панели инструментов необходимо выбрать инструмент «Правильный многоугольник»
 - Отметить в координатной плоскости первую вершину семиугольника, а затем вторую.
 - В открывшемся окне ввести количество вершин многоугольника – 7. Получится такой рисунок:



- Повторяя действия, которые вы выполнили при решении предыдущей задачи, переместите названия вершин семиугольника так, чтобы было более удобно для восприятия. После этого скройте обозначение объекта «Многоугольник», как вы это делали при решении предыдущей задачи (см. страницу 8). У меня получилось так:



5. Вы также можете изменить цвет серых вершин на синие или любые другие.
 6. Самостоятельно раскрасьте стороны семиугольника в разные цвета и сделайте внутреннюю область семиугольника невидимой.



Задача 4.

- а) Построить окружность по центру и точке.
 б) Построить окружность по центру и радиусу. Изменить цвет окружности.
 в) Построить окружность по трем точкам.

Используя алгоритмы на странице 5, решите задачу 4 самостоятельно.

Задача 5.

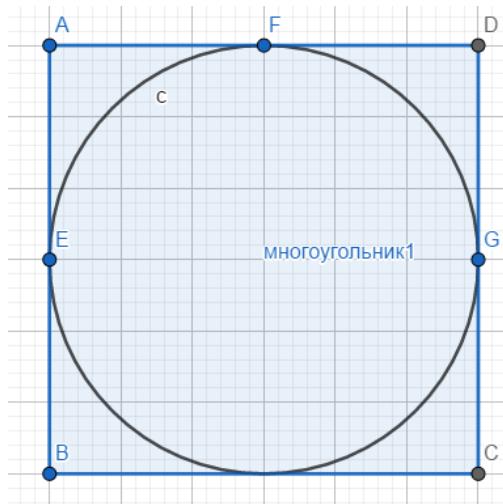
К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

- а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
 б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

Выполним чертеж к задаче в программе Geogebra.

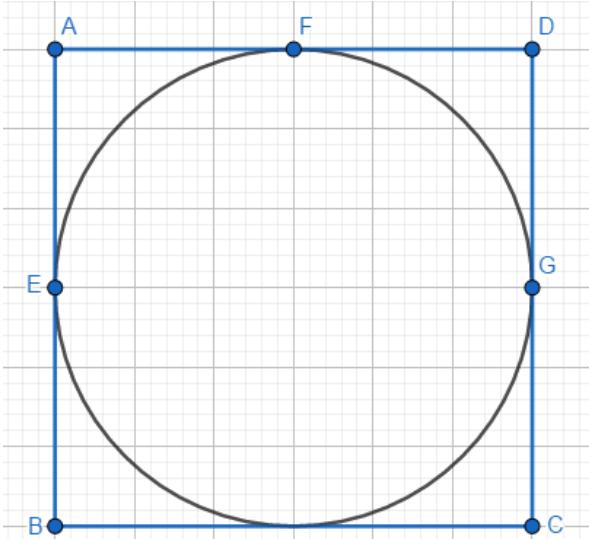
1. Уберем координатные оси, чтобы они не нагромождали рисунок. Для этого в любом месте координатной плоскости кликните правой кнопкой мыши и снимите галочку напротив пункта «Показывать оси». Координатные оси исчезнут.

2. Построим квадрат при помощи инструмента «Правильный многоугольник»
 3. Построим окружность по трем точкам. Выбирайте любые три середины сторон квадрата. Получается вот такой рисунок

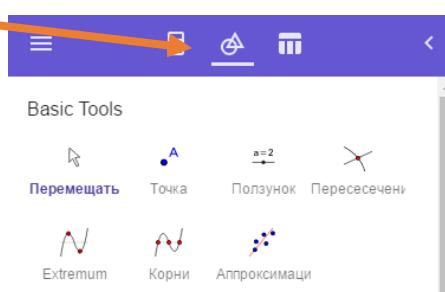


4. Поработаем с этим рисунком. Скроем название «многоугольник1». Для этого кликнем левой кнопкой мыши по любой части внутренней области квадрата, в открывшемся меню выберем три точки и далее пункт «Настройки». В открывшемся справа окне снимите галочку с пункта «Показывать обозначение». Здесь же можно убрать и имя окружности c . Для этого наведите курсор мыши на окружность так, чтобы курсор принял форму «Пальца». Кликните по окружности. В меню справа снова снимите галочку «Показывать обозначение»

5. Сделаем прозрачной внутреннюю часть квадрата, изменим цвет всех точек на синий. Перетащите имена некоторых точек так, чтобы было удобно их читать.



6. Теперь будем проводить касательную. Перед тем, как приступим к проведению касательной, рассмотрим Панель для ввода формул. Для того, чтобы перейти на Панель для ввода формул слева найдите кнопку «Алгебра» с изображением калькулятора:



Нажмите на нее. Теперь ваш экран выглядит так

Графический калькулятор - GeoGebra

<input type="radio"/> A = (-4, 0)	⋮
<input type="radio"/> B = (-4, -6)	⋮
<input type="radio"/> многоугольник1 = Многоугольник(A, B, 4)	⋮
→ 36	
<input type="radio"/> f = Отрезок(A, B, многоугольник1)	⋮
→ 6	
<input type="radio"/> E = Точка(f)	⋮
→ (-4, -3)	
<input type="radio"/> F = Точка(i)	⋮
→ (-1, 0)	
<input type="radio"/> G = Точка(h)	⋮
→ (2, -3)	
<input checked="" type="radio"/> с : Окружность(E, F, G)	⋮
→ $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$	
+ Ввод...	

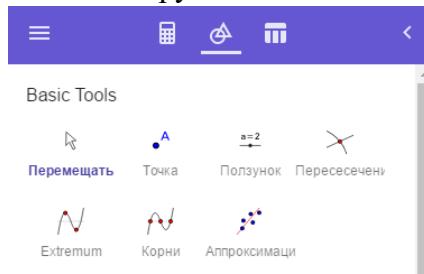
Обратите внимание, что слева приведен полный список объектов, которые изображены у вас на полотне. Точки с координатами, многоугольник и окружность с уравнением ее задающим. Это алгебраическое описание построенных вами объектов. Кстати, если мышкой нажимать на кружочки рядом с объектами в этом списке, то объекты будут исчезать. Например, если мы нажмем на кружок рядом с точкой A, то на рисунке эта точка исчезнет:

Графический калькулятор - GeoGebra

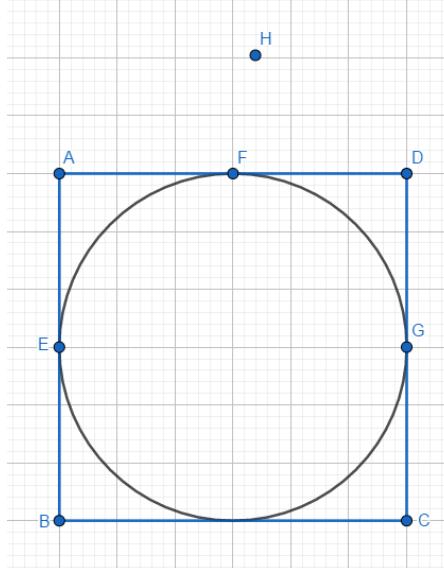
<input type="radio"/> A = (-4, 0)	⋮
<input type="radio"/> B = (-4, -6)	⋮
<input type="radio"/> многоугольник1 = Многоугольник(A, B, 4)	⋮
→ 36	
<input type="radio"/> f = Отрезок(A, B, многоугольник1)	⋮
→ 6	
<input type="radio"/> E = Точка(f)	⋮
→ (-4, -3)	
<input type="radio"/> F = Точка(i)	⋮
→ (-1, 0)	
<input type="radio"/> G = Точка(h)	⋮
→ (2, -3)	
<input checked="" type="radio"/> с : Окружность(E, F, G)	⋮
→ $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$	
+ Ввод...	

Чтобы точку вернуть, вам необходимо снова нажать на кружок рядом с точкой A.

Вернемся к задаче. Нам нужно провести касательную к окружности, которая пересекает стороны AB и AD . Вернемся обратно на Панель инструментов «Геометрия». Для этого выберем значок «Треугольник и окружность» на панели справа



7. Для того, чтобы построить касательную, нам необходимо выбрать точку за пределами окружности, из которой касательная будет проведена. Например, точка H

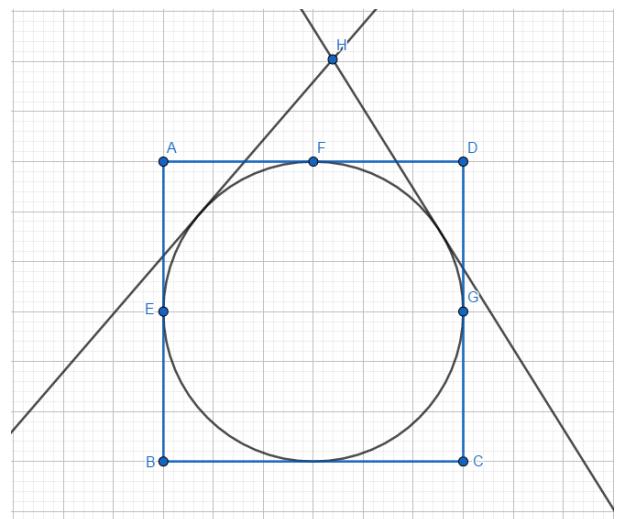


8. На Панели инструментов в блоке Construct найдем инструмент «Касательная».

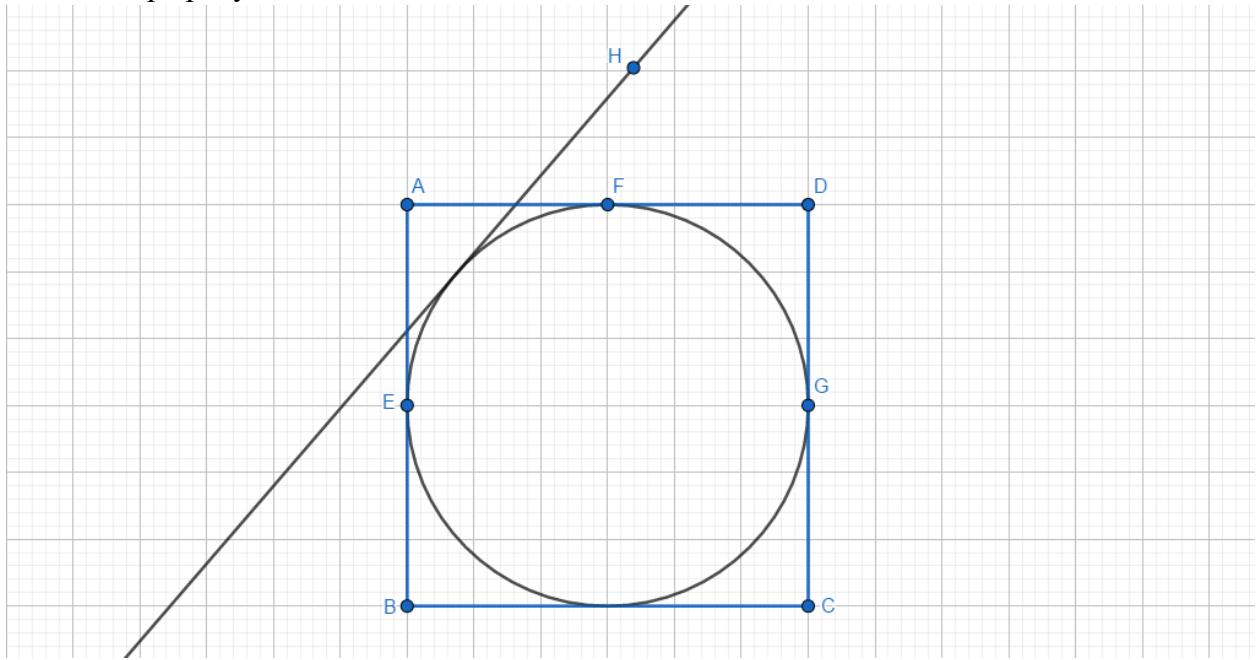


Выберем его. Теперь чтобы построить касательную нам необходимо выбрать точку, через которую будет проведена касательная (у нас это точка H) и окружность. (кликаем сначала на точку, а потом в любом месте на окружности).

Как можно увидеть, из точки проведены две касательные. Одну из них нужно убрать, перейдя на Панель «Алгебра», как вы делали это на странице 14.



Теперь рисунок выглядит так

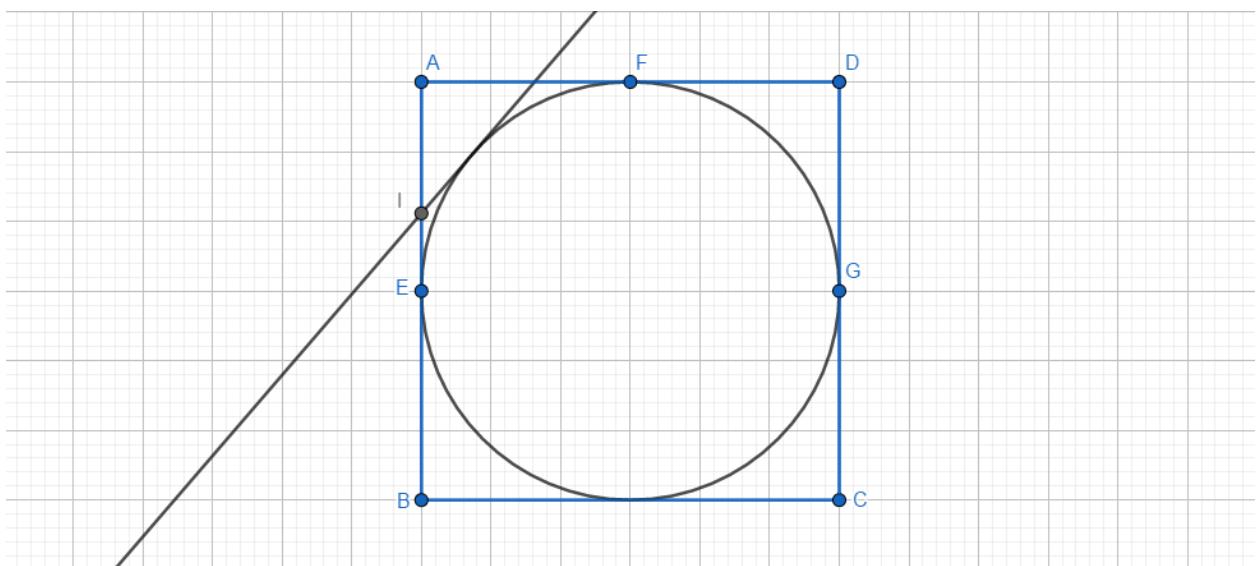


9. Отметим точки M и N , которые по условию задачи являются точками пересечения касательной и сторон AB и AD соответственно. Чтобы построить точки пересечения, выберем инструмент «Пересечение» на Панели инструментов

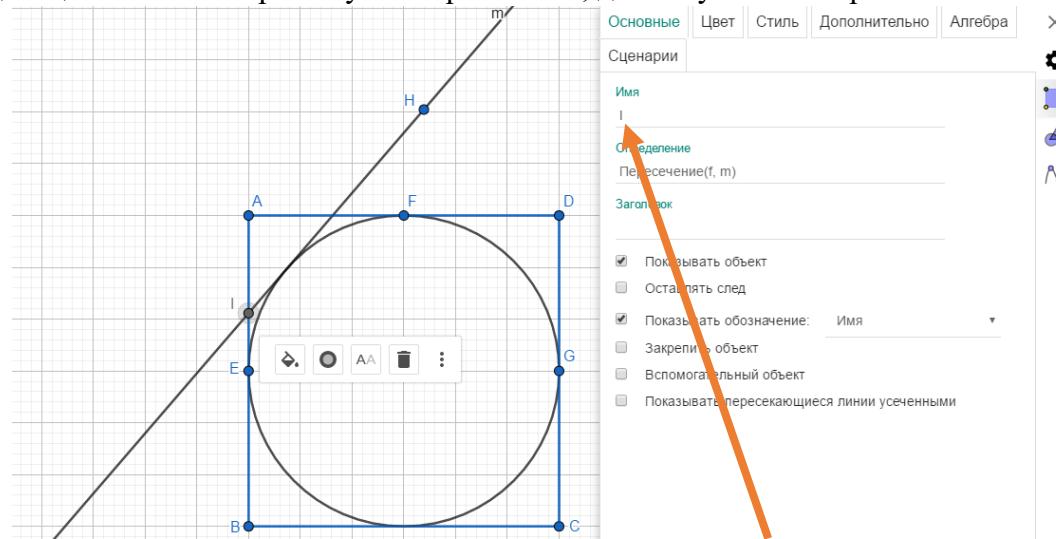
Basic Tools



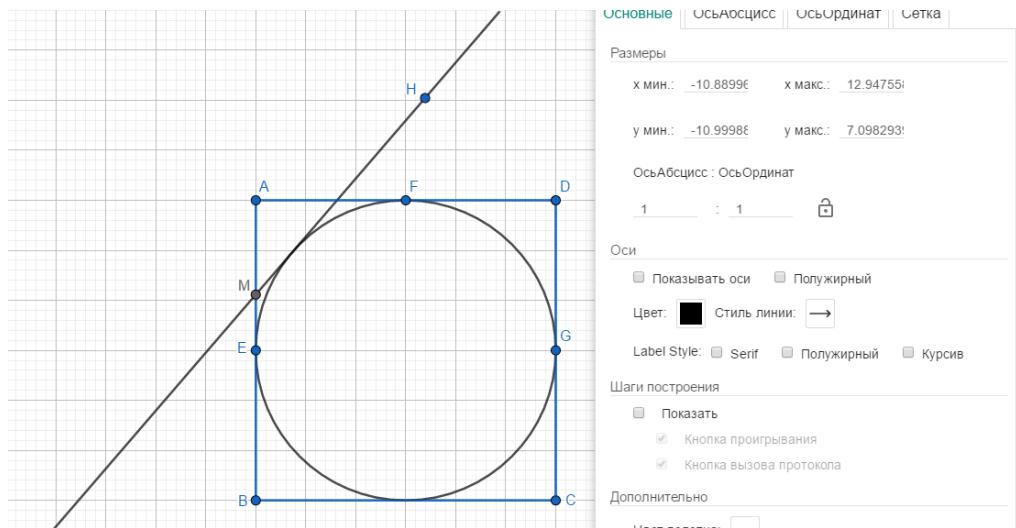
10. Чтобы построить точку пересечения, нам необходимо последовательно выделить мышкой два объекта, для которых мы строим точку пересечения. Например, выделим сначала сторону AB , а потом касательную. У меня появилась точка I . Переименуем ее.



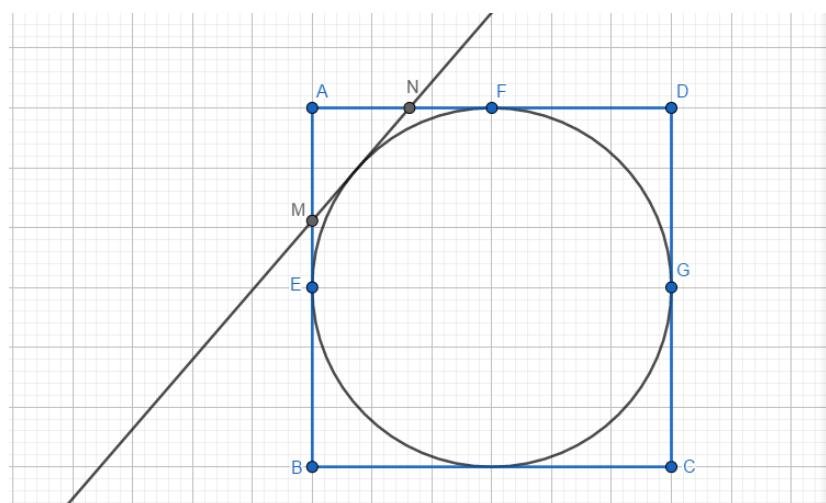
11. Чтобы переименовать точку, кликните по ней левой кнопкой мыши, в выпадающем меню выберите пункт «три точки», далее пункт «Настройки»



12. Справа в открывшемся меню найдите пункт «Имя» и поставьте курсор мыши справа от имени точки. Нажмите клавишу Back Space для того, чтобы удалить имя точки и введите новое имя – *M*. Далее кликните в любом месте полотна, где изображены окружность и квадрат. Имя точки изменится.



13. Для того, чтобы построить точку *N*, выполните действия из пунктов 9 – 12.



14. Приступим к решению задачи.

а) Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается его стороны AB в точке E , стороны AD — в точке F , а прямой MN — в точке T .

Построим точку T — точку касания окружности и прямой MN . Для этого выполним пункты 9-12.

По свойству касательных $NF = NT$ и $MT = EM$ и $AF = AE$. Тогда

$$AM + MN + AN = AM + MT + NT + AN = \\ (AM + ME) + (NF + AN) = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = AB$$

Что и требовалось доказать.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . Построим эту прямую и точку пересечения MN и CD .

Для того, чтобы построить прямую CD выберем инструмент «Прямая» и построим прямую через точки C и D . Далее при помощи инструмента «Пересечение» построим точку пересечения двух прямых и переименуем ее в точку P . (см. рис.1)

Также необходимо построить точку O — центр окружности и прямую, соединяющую центр окружности и точку P . Воспользуемся инструментом «Прямая» и построим прямую по двум точкам - O и P . (см. рис.2)

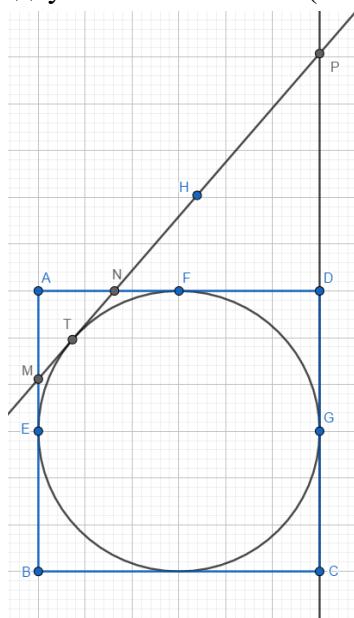


Рис. 1

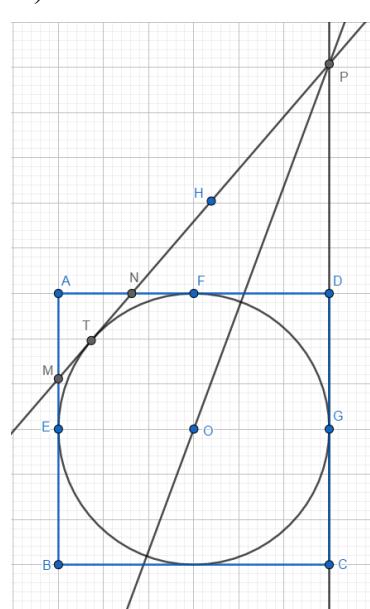


Рис. 2

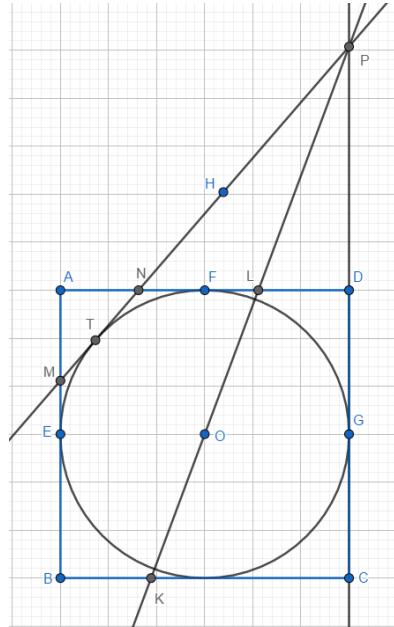


Рис. 3

б) Положим $AB = 12a$, $TN = NF = x$. Тогда

$$AM = 3a; AN = AF - NF = 6a - x;$$

$$MN = MT + TN = 3a + x;$$

По теореме Пифагора: $AM^2 + AN^2 = MN^2$, то есть $9a^2 + (6a - x)^2 = (3a + x)^2$; $x = 2a$.

Тогда $AN = 4a$ и $MN = 5a$. Пусть O — центр окружности, а прямая PO пересекает стороны AD и BC в точках L и K соответственно. (Построим прямую PO и точки пересечения этой прямой со сторонами AD и BC в точках L и K соответственно. Для этого воспользуемся сначала инструментом «Прямая» и построим прямую PO , а затем дважды воспользуемся инструментом «Пересечение» - см.рис.3). Из равенства треугольников DOL и BOK следует, что $DL = BK$,

поэтому $\frac{BK}{KC} = \frac{DL}{LA}$. Окружность вписана в угол MPC , значит, PL — биссектриса треугольника DPN , который подобен треугольнику AMN . Используя свойство биссектрисы и подобие, находим: $\frac{DL}{LN} = \frac{PD}{PN} = \frac{AM}{MN} = \frac{3}{5}$, откуда $DL = \frac{3}{8}DN$.

Учитывая, что $DN = DA - AN = 12a - 4a = 8a$, находим, что $DL = 3a$, $LA = 9a$. Тогда

$$\frac{BK}{KC} = \frac{DL}{LA} = \frac{1}{3}$$

Ответ: б) 1 : 3.

§2. Построение объемных фигур

Для того, чтобы построить объемные фигуры в Geogebra, нам необходимо переключиться на 3D интерфейс. Для этого выполним следующие действия:

- 1) Над Панелью инструментов найдем значок «Три черты». (см. рис. 1). Кликнем по нему левой кнопкой мыши.
- 2) Откроется меню (см. рис.2). В открывшемся меню нужно выбрать пункт Apps (см.рис.2)
- 3) И в новом открывшемся меню выбрать 3D Calculator (см.рис.3). Начнется открытие приложения. Разверните его на весь экран.

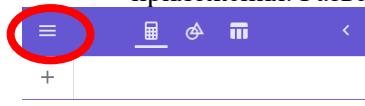


Рис. 1

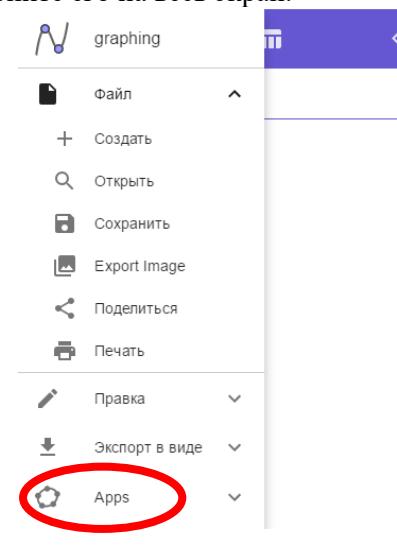


Рис. 2

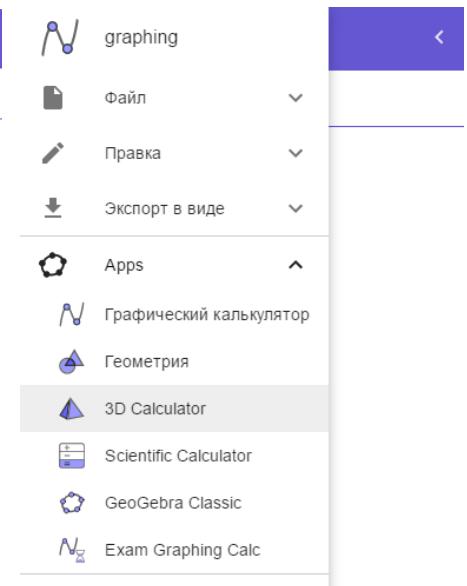
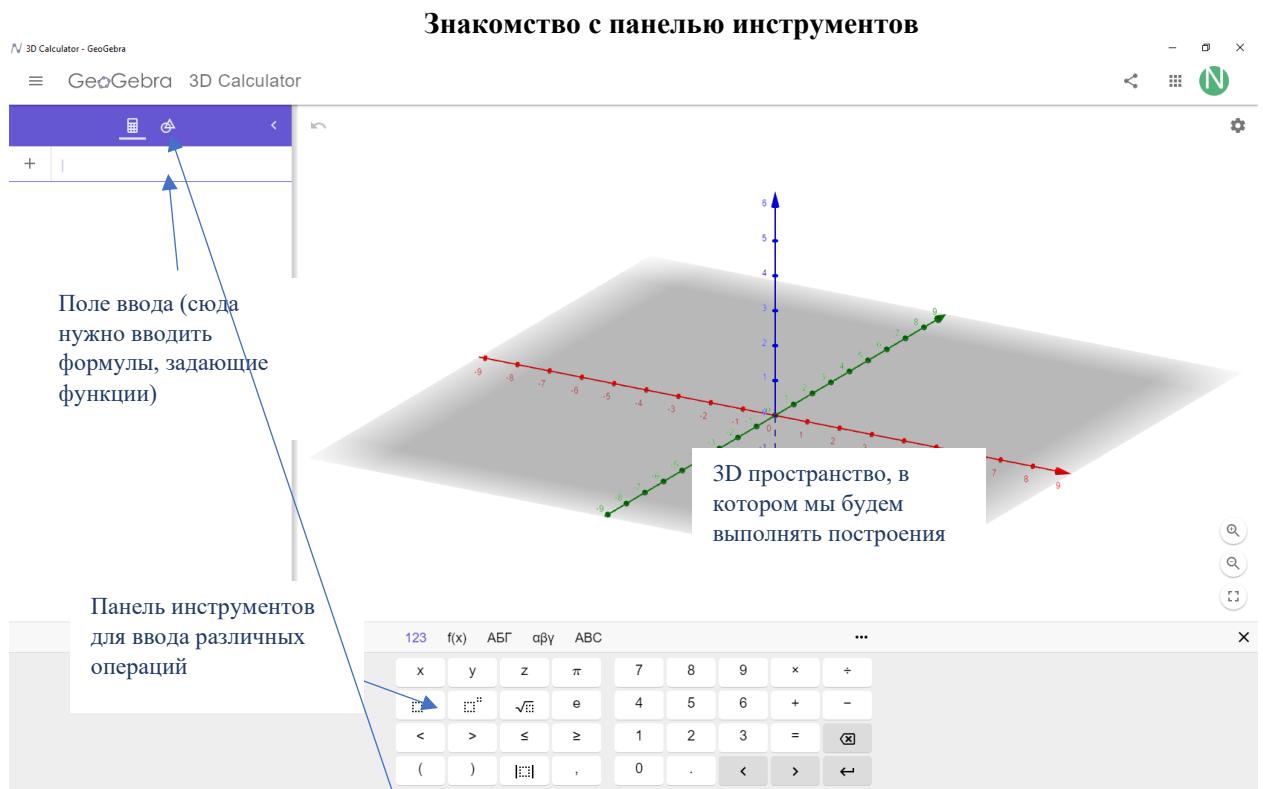
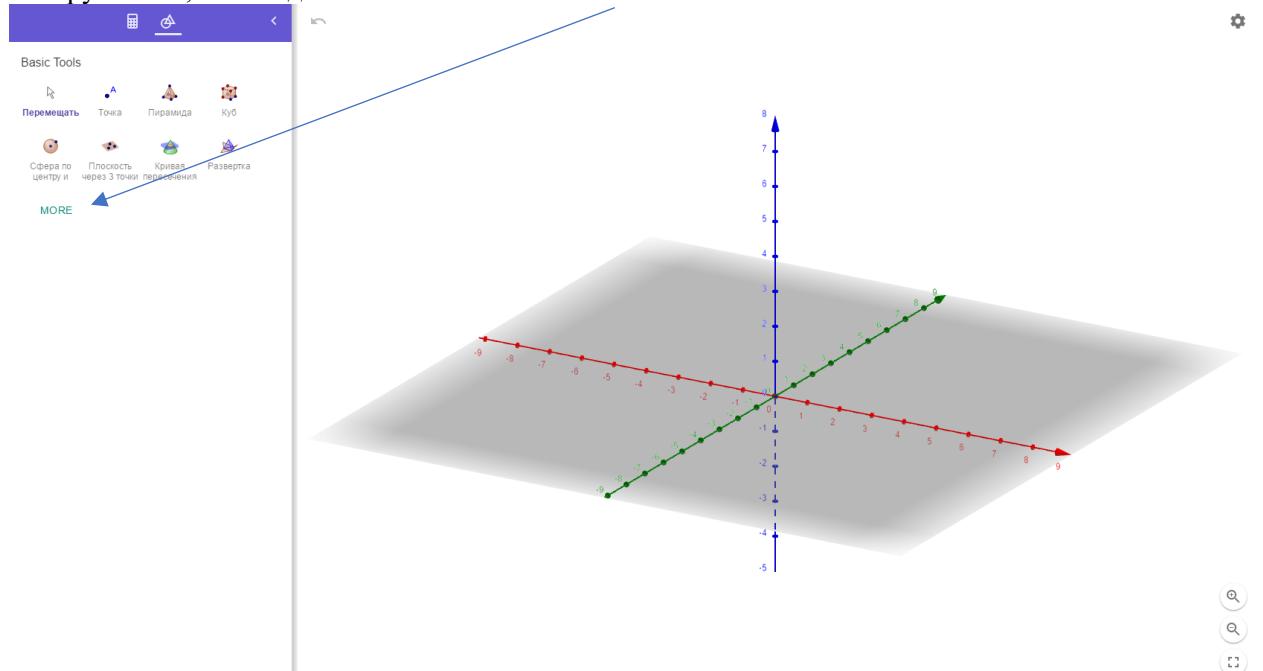


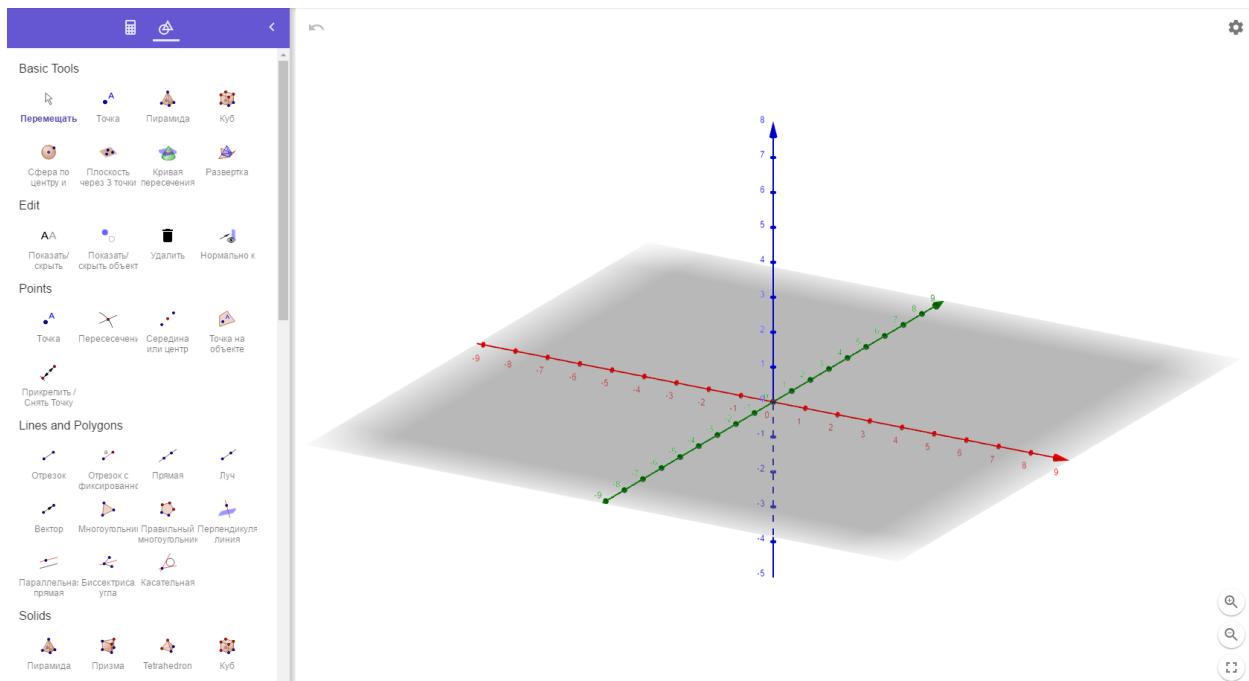
Рис. 3



Рассмотрим основные элементы приложения Geogebra 3D Calculator.
Переключитесь в раздел «Геометрия». Слева появится панель инструментов. Чтобы увидеть больше инструментов, необходимо нажать на значок «MORE»



Тогда вы увидите следующее изображение (см. на следующей странице):



Часть инструментов будет повторяться. Рассмотрим те инструменты, которые характерны для построений в пространстве.

Блок Solids

В этом блоке нам понадобятся инструменты «Пирамида», «Призма», «Сфера по центру и точке», «Сфера по центру и радиусу», «Конус», «Цилиндр».

Инструмент «Пирамида» позволяет построить произвольную пирамиду. Для того, чтобы построить пирамиду, необходимо:

- 1) Выбрать инструмент «Пирамида»;
- 2) Отметить нужно количество точек в основании пирамиды в плоскости xOy ;
- 3) Отметить точку на оси Oz , которая будет являться вершиной пирамиды (см. рис. 4)

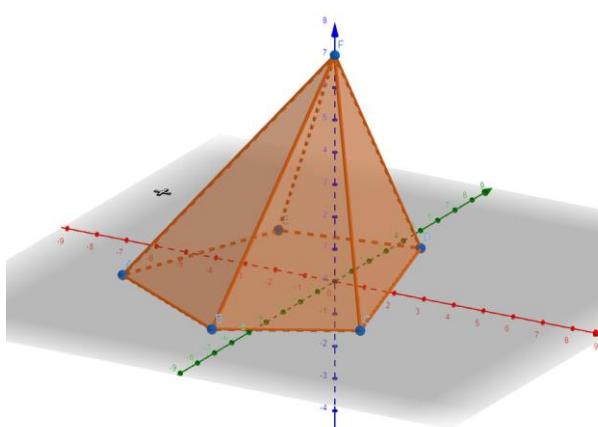


Рис. 4

Solids

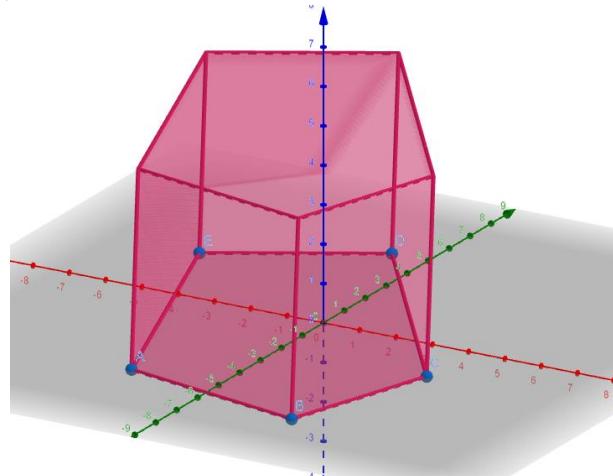
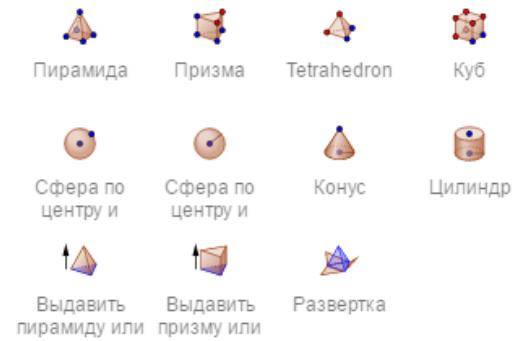


Рис. 5

Инструмент «Призма» позволяет построить произвольную призму. Для того, чтобы построить призму, необходимо:

- 1) Выбрать инструмент «Призма»;

- 2) Отметить нужно количество точек в основании пирамиды в плоскости xOy ;
- 3) Постройте первую верхнюю вершину (см. рис. 5)

Инструмент «**Цилиндр**» позволяет построить цилиндр по двум точкам и радиусу. Для того, чтобы построить цилиндр, необходимо:

- 1) Выбрать инструмент «Цилиндр»;
- 2) Отметить две точки на оси Oz ;
- 3) В открывшемся окне ввести радиус цилиндра (см. рис. 6)

Инструмент «**Конус**» позволяет построить конус по двум точкам и радиусу. Для того, чтобы построить конус, необходимо:

- 1) Выбрать инструмент «Конус»;
- 2) Отметить две точки на оси Oz ;
- 3) В открывшемся окне ввести радиус конуса (см. рис. 7)

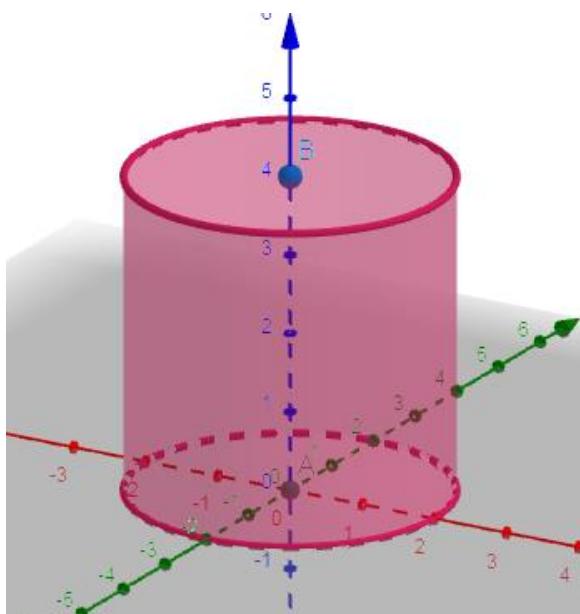


Рис.6

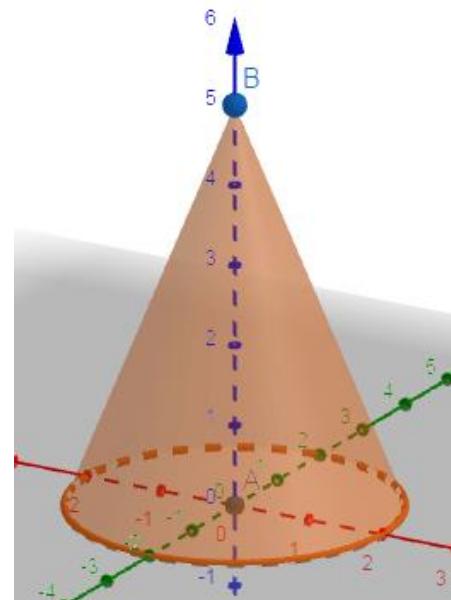


Рис.7

Инструмент «**Сфера по центру и точке**» позволяет построить сферу по ее центру и точке, лежащей на сфере. Для того, чтобы построить сферу по центру и точке, необходимо:

- 1) Выбрать инструмент «Сфера по центру и точке»;
- 2) Отметить центр сферы;
- 3) Отметить вторую точку, которая лежит на сфере (см. рис. 8)

Инструмент «**Сфера по центру и радиусу**» позволяет построить сферу по ее центру и радиусу. Для того, чтобы построить сферу по центру и радиусу, необходимо:

- 1) Выбрать инструмент «Сфера по центру и радиусу»;
- 2) Отметить центр сферы;
- 3) В открывшемся окне ввести радиус сферы (см. рис. 9)

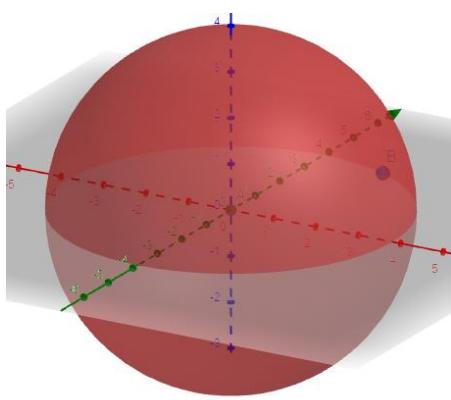


Рис.8

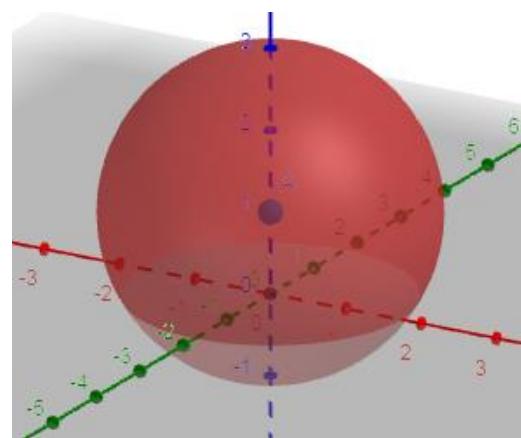


Рис.9

§3. Решение задач в Geogebra 3D Calculator

Задачи 1-6 выполните самостоятельно, используя вышеприведенные алгоритмы.

Задача 1. Постройте пятиугольную пирамиду по алгоритму.

Задача 2. Постройте треугольную призму по алгоритму.

Задача 3. Постройте цилиндр с радиусом 3 по алгоритму.

Задача 4. Постройте конус с радиусом 2 по алгоритму.

Задача 5. Постройте сферу по центру и точке, лежащей на сфере.

Задача 6. Постройте сферу по центру и радиусу ($r = 3$).

Задача 7. Постройте треугольную пирамиду $DABC$. На ребрах AB , BD и CD отметьте точки M , N и P соответственно. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNP (рис.10)

Решение. Проведем прямые MN и NP (рис.11). Для наглядности поворачайте 3D полотно.

Построим прямую BC и найдем точку E – точку пересечения прямых BC и NP (рис.12)

Точки E и M лежат в одной плоскости. Проведем прямую EM (рис.13)

Точка F – точка пересечения прямых EM и AC . (рис. 14)

Точки F и P лежат в одной плоскости. Проведем прямую FP (рис. 15)

Итак, четырехугольник $FPMN$ – искомое сечение. Далее можно изменить стиль линий, заливку пирамиды и т.д. (рис.16)

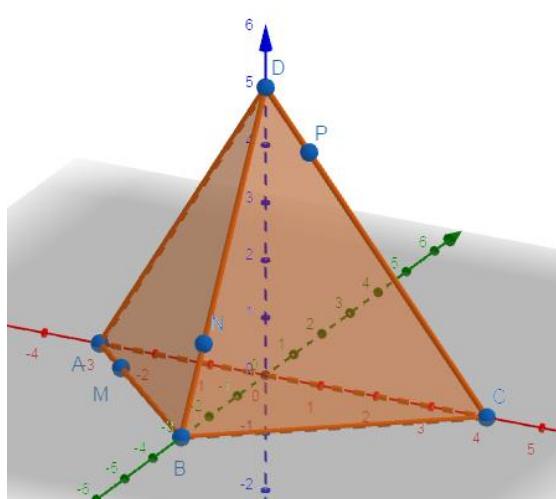


Рис. 10

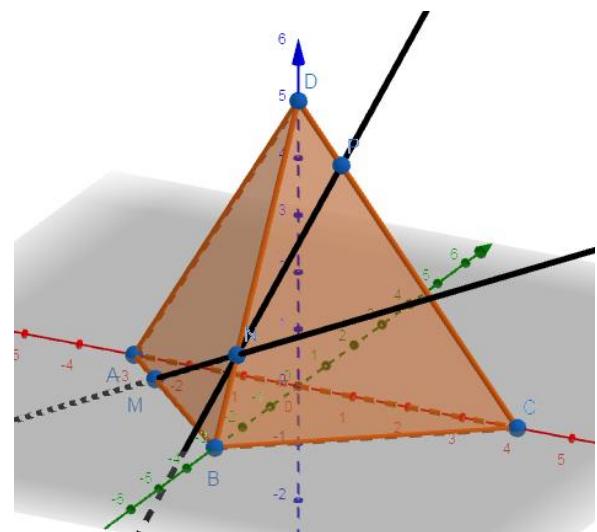


Рис. 11

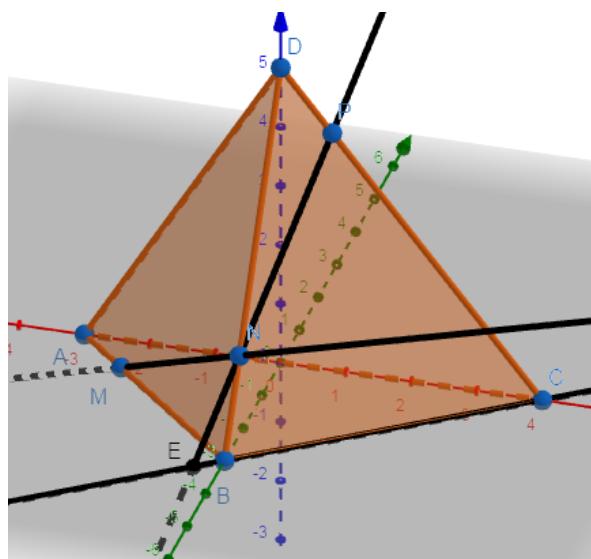


Рис. 12

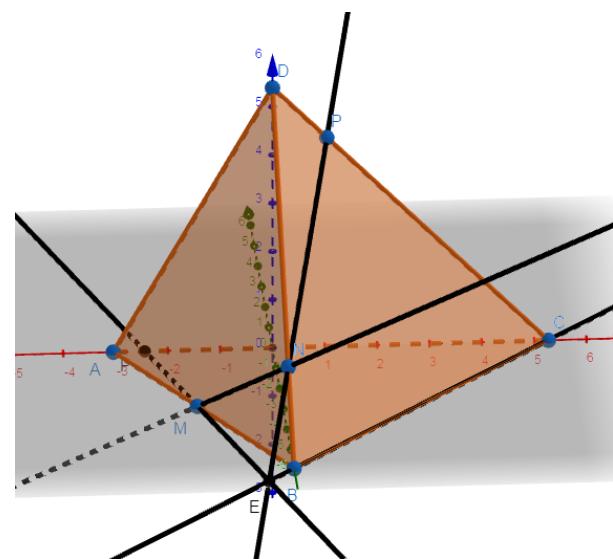


Рис. 13

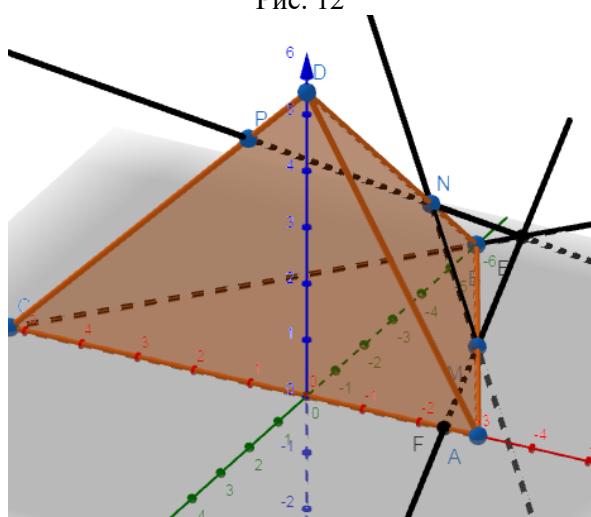


Рис. 14

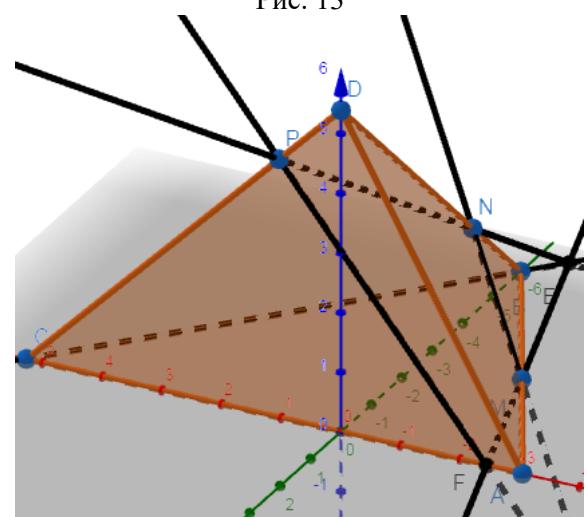


Рис. 15

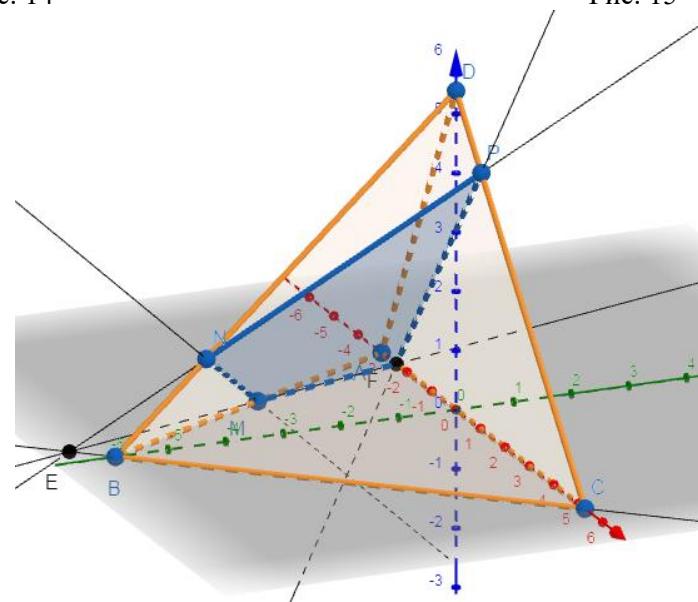


Рис. 16

Преимущество Geogebra 3D Calculator также состоит в том, что всегда можно проверить, правильно ли сечение было построено.

Для того, чтобы проверить правильность построенного сечения, необходимо выбрать инструмент «Плоскость по трем точкам» и выбрать три точки (в задаче 7 это точки M , N и P).

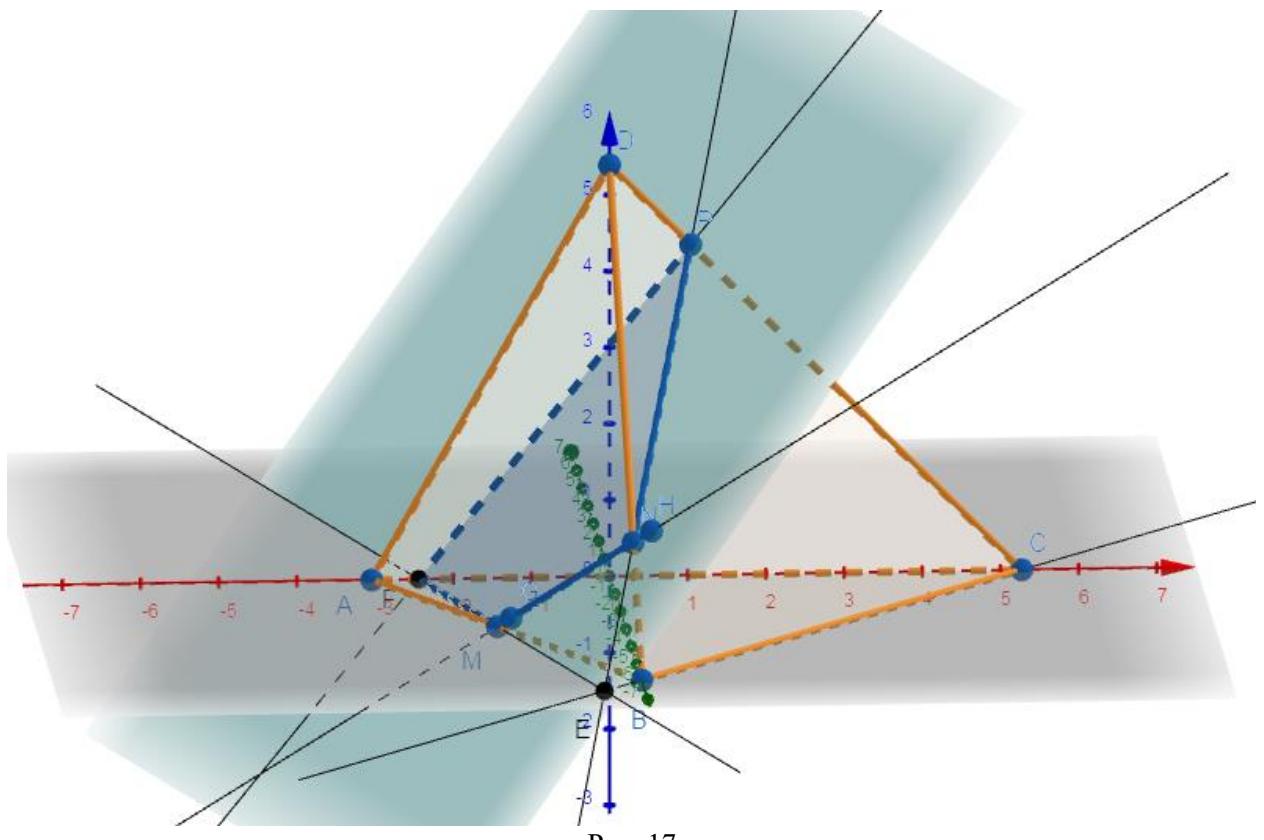


Рис. 17

Задача 8. Точка M лежит на боковой грани ABD тетраэдра $DABC$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M , параллельно основанию ABC . (рис. 18 а,б)

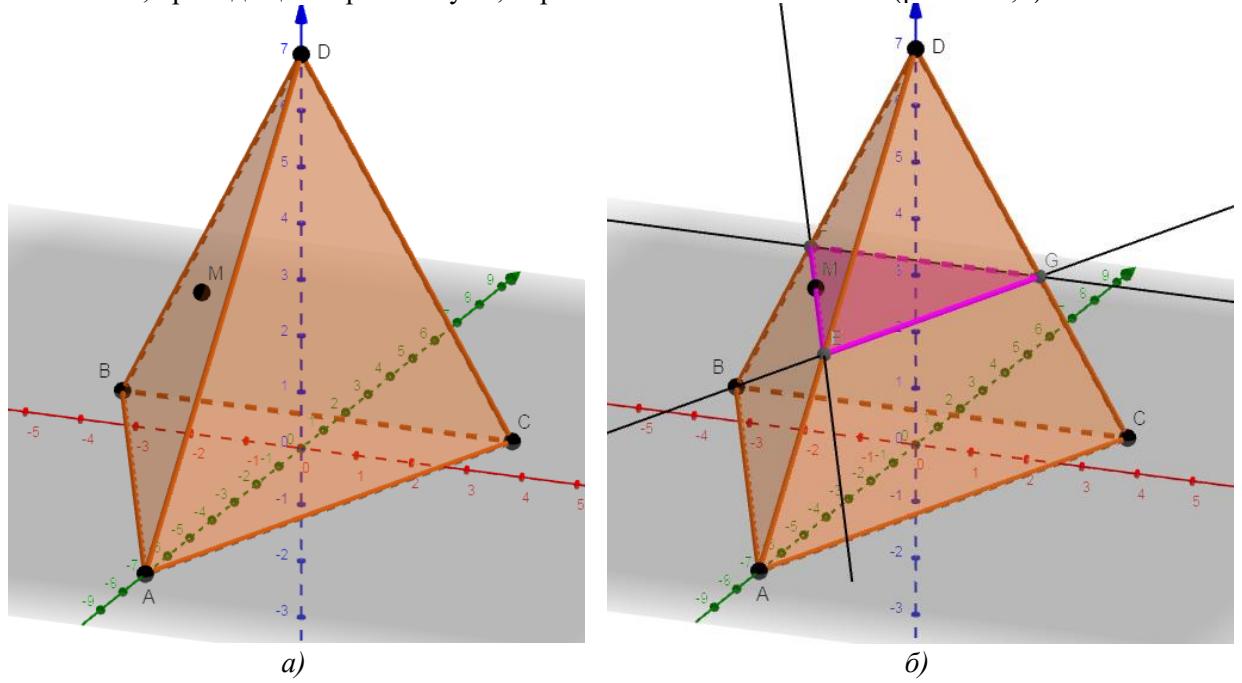
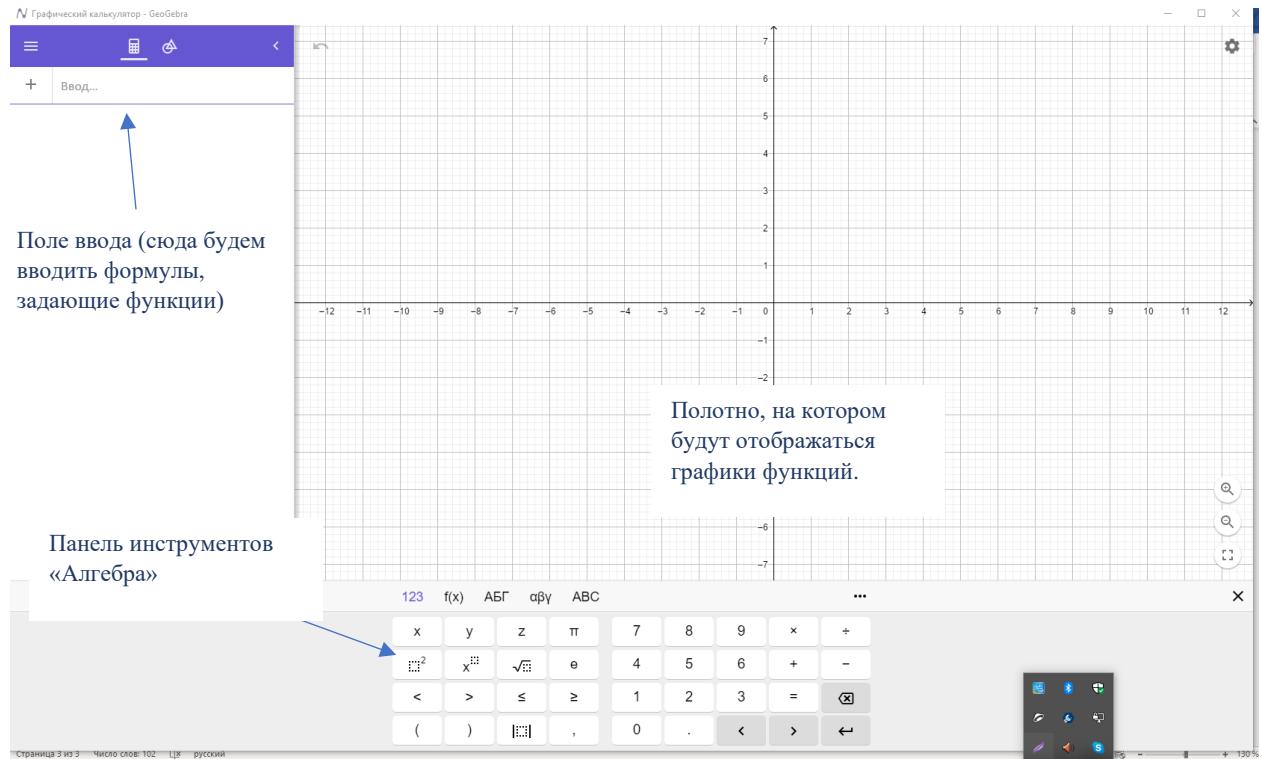


Рис.18

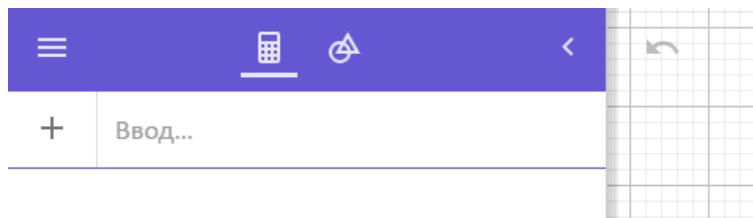
ГЛАВА III. ПРИМЕНЕНИЕ GEOGEBRA НА УРОКАХ АЛГЕБРЫ

§1. Знакомство с интерфейсом

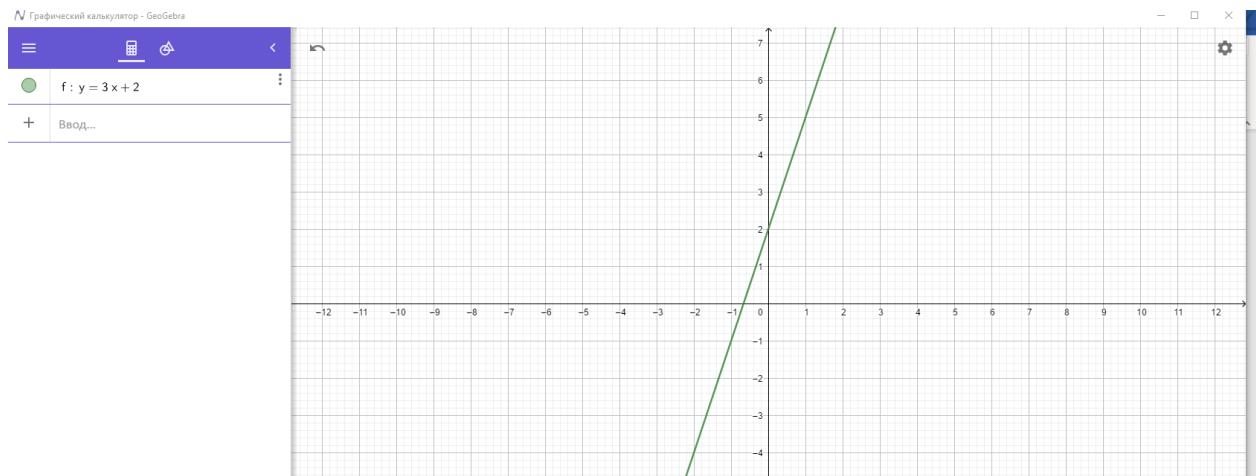


Задача 1. Построить график функции $y = 3x + 2$

В поле ввода ввести $y = 3x + 2$ и нажать клавишу Enter.

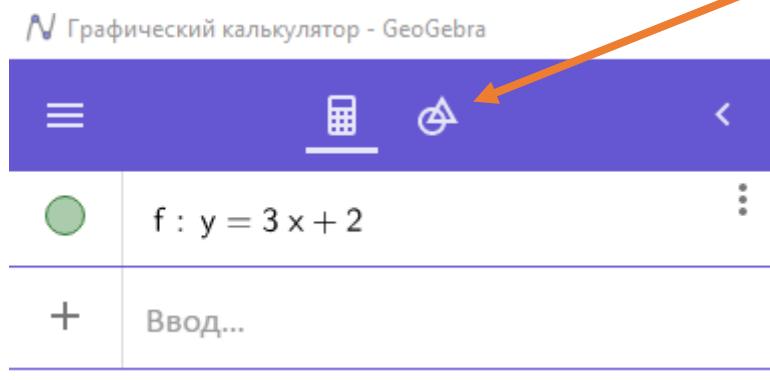


У нас получилась прямая



Подпишем график.

Для этого переключимся на Панель инструментов «Геометрия»

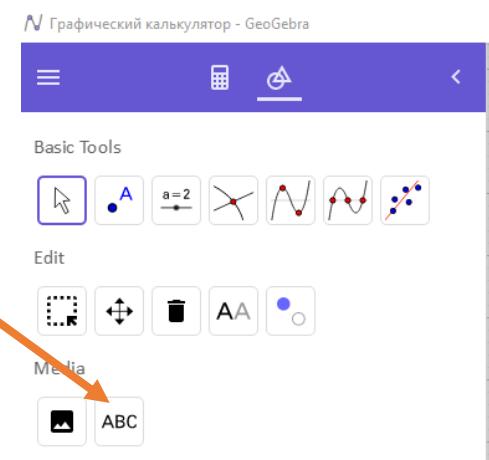
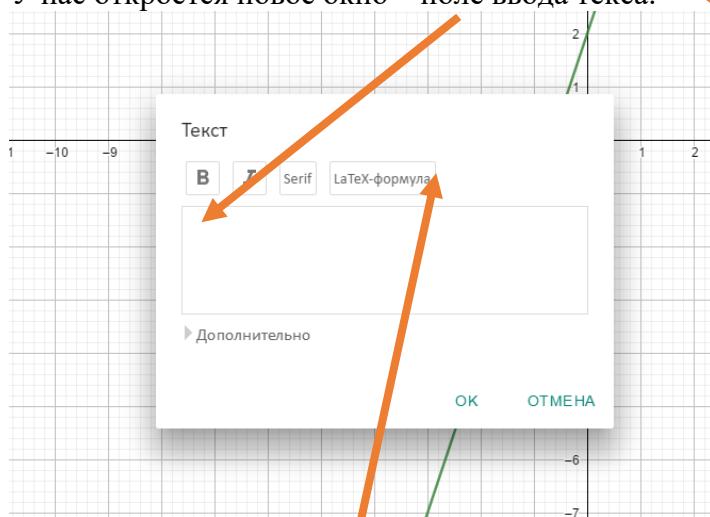


Откроется панель «Геометрия». Найдите инструмент «Ввод текста» – «ввод текста».

Кликаем на него один раз мышкой.

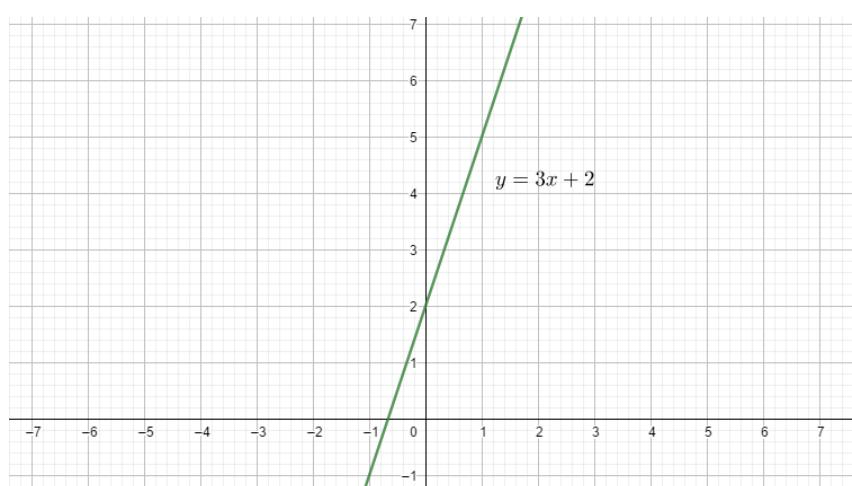
Рядом с графиком функции, где мы хотим подписать ее, снова кликаем мышкой.

У нас откроется новое окно – поле ввода текста.



Нажимаем кнопку LaTeX формула.

Кликаем мышкой в поле ввода. Теперь можно написать $y = 3x + 2$ и жмем кнопку OK.

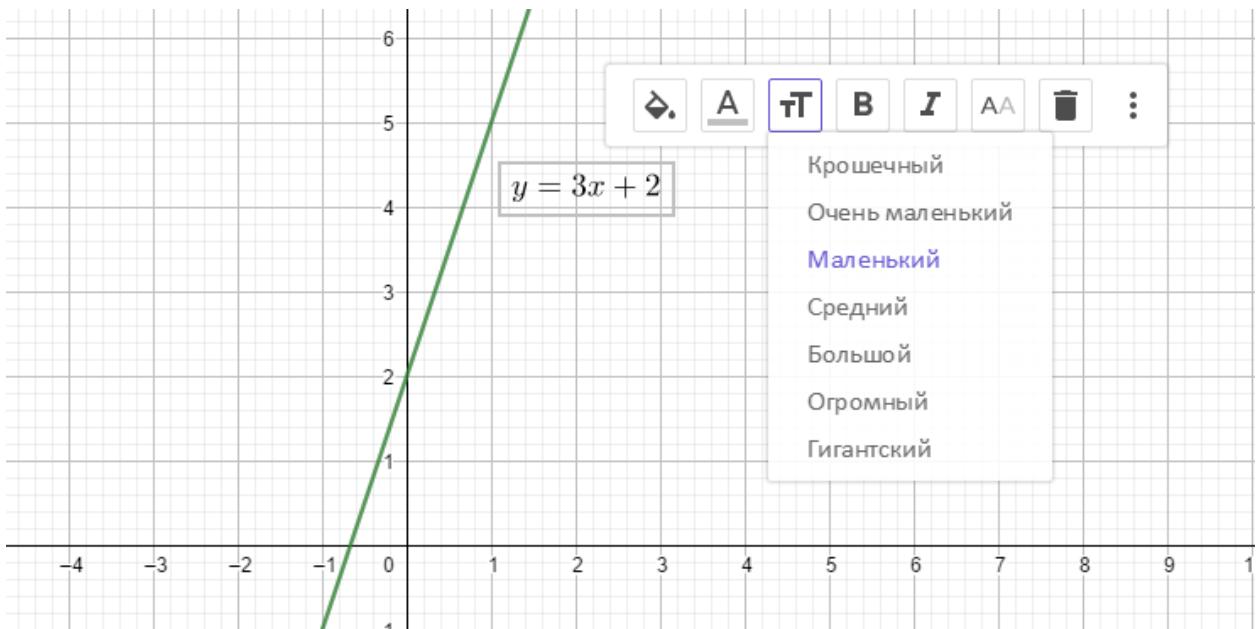


Если надпись кажется мелкой, то можно увеличить ее размер. Для этого на Панели инструментов нужны кликнуть по кнопке «Стрелка».

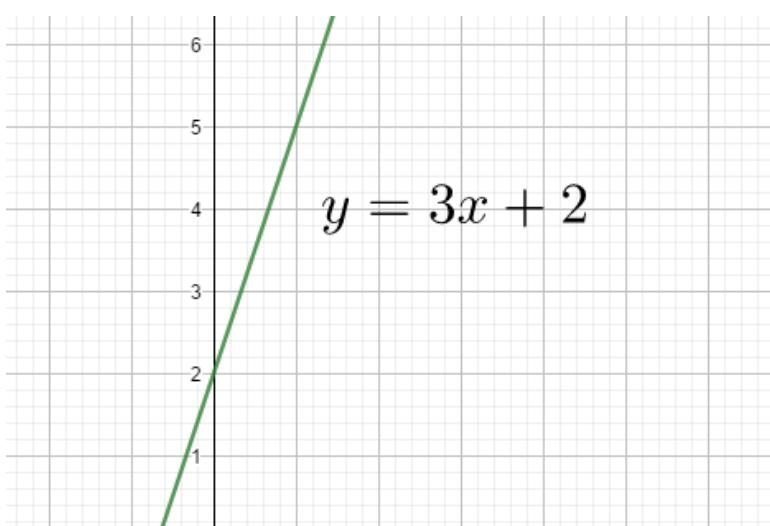
Basic Tools



Теперь кликнем по надписи, которую мы только что сделали. У вас появится вспомогательная панель для работы с текстом. Здесь можно изменить цвет надписи, придать ей форматирование (курсив, жирный) и изменить размер. Для этого кликаем по кнопке «Т» и выбираем тот размер, который хотим.

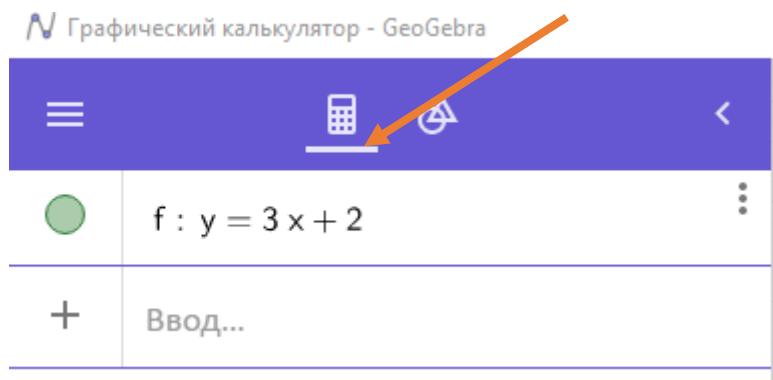


Например, «Большой»

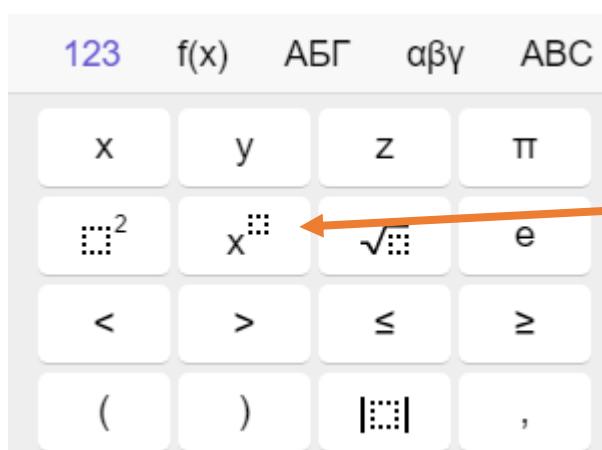
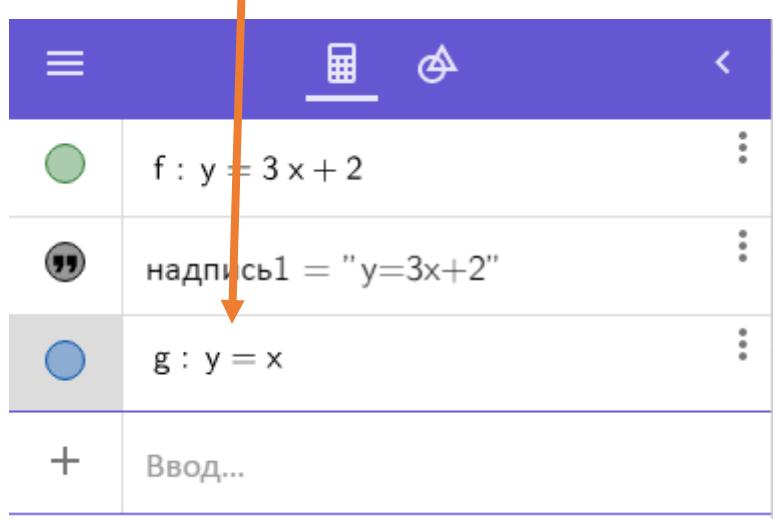


Задача 2. Построим график функции $y = x^2 + 2$.

Переходим обратно на панель ввода формул

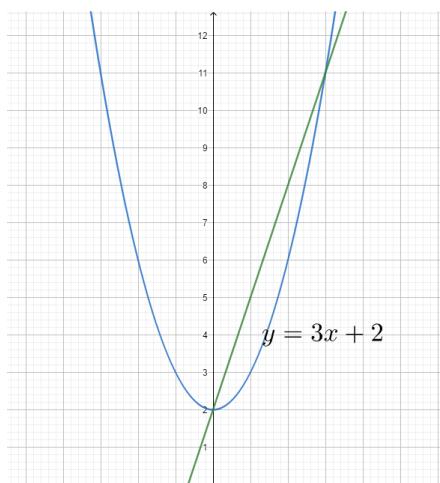


И вводим формулу



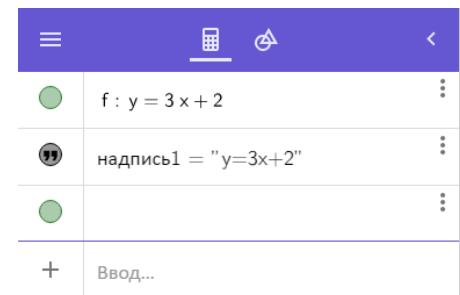
Если вдруг вы не знаете, как вводится степень, то можно воспользоваться вспомогательной панелью снизу. Для этого вводим сначала $y = x$, после чего нажимаем на кнопку и набираем 2. Далее не забудьте обязательно нажать кнопку на клавиатуре «стрелка вправо».

Вводим формулу до конца и жмем клавишу Enter.



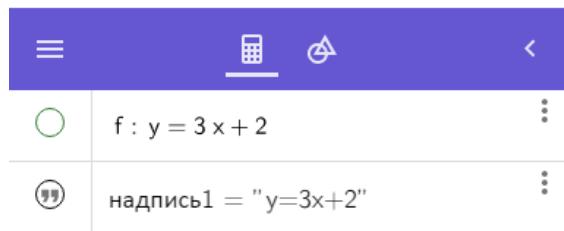
На полотне до сих пор остались прямая и надпись. Можете их убрать.

Для этого возвращаемся на панель инструментов.

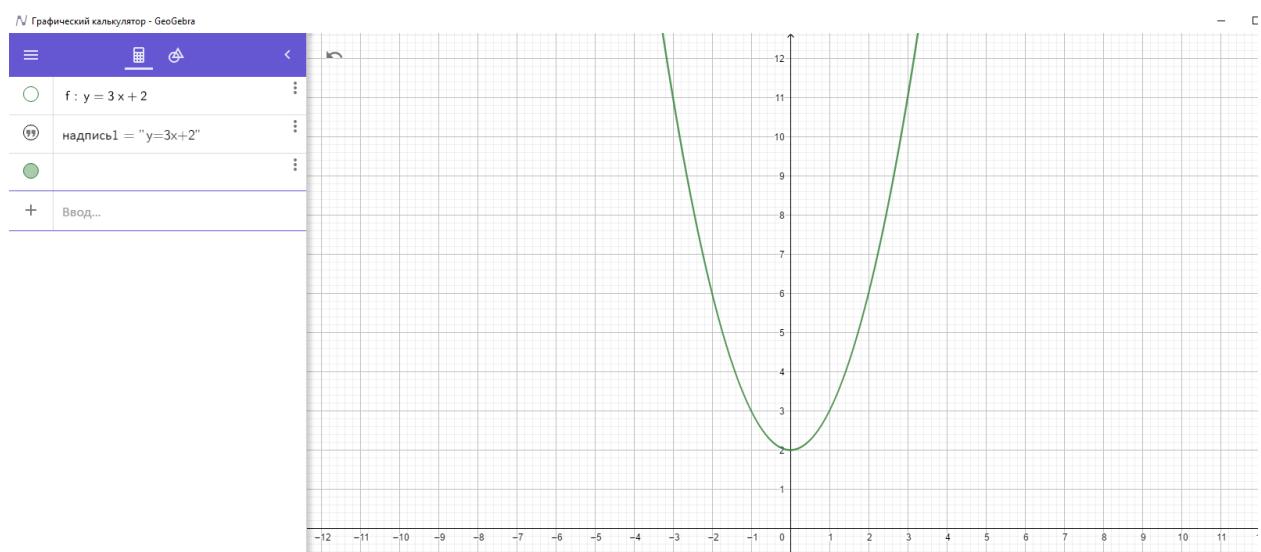


Посмотрите, рядом с каждой формулой есть цветной кружочек. Чтобы сделать рисунок невидимым, вам нужно один раз нажать на него, чтобы он превратился в окружность.

Вот так теперь выглядит панель инструментов.

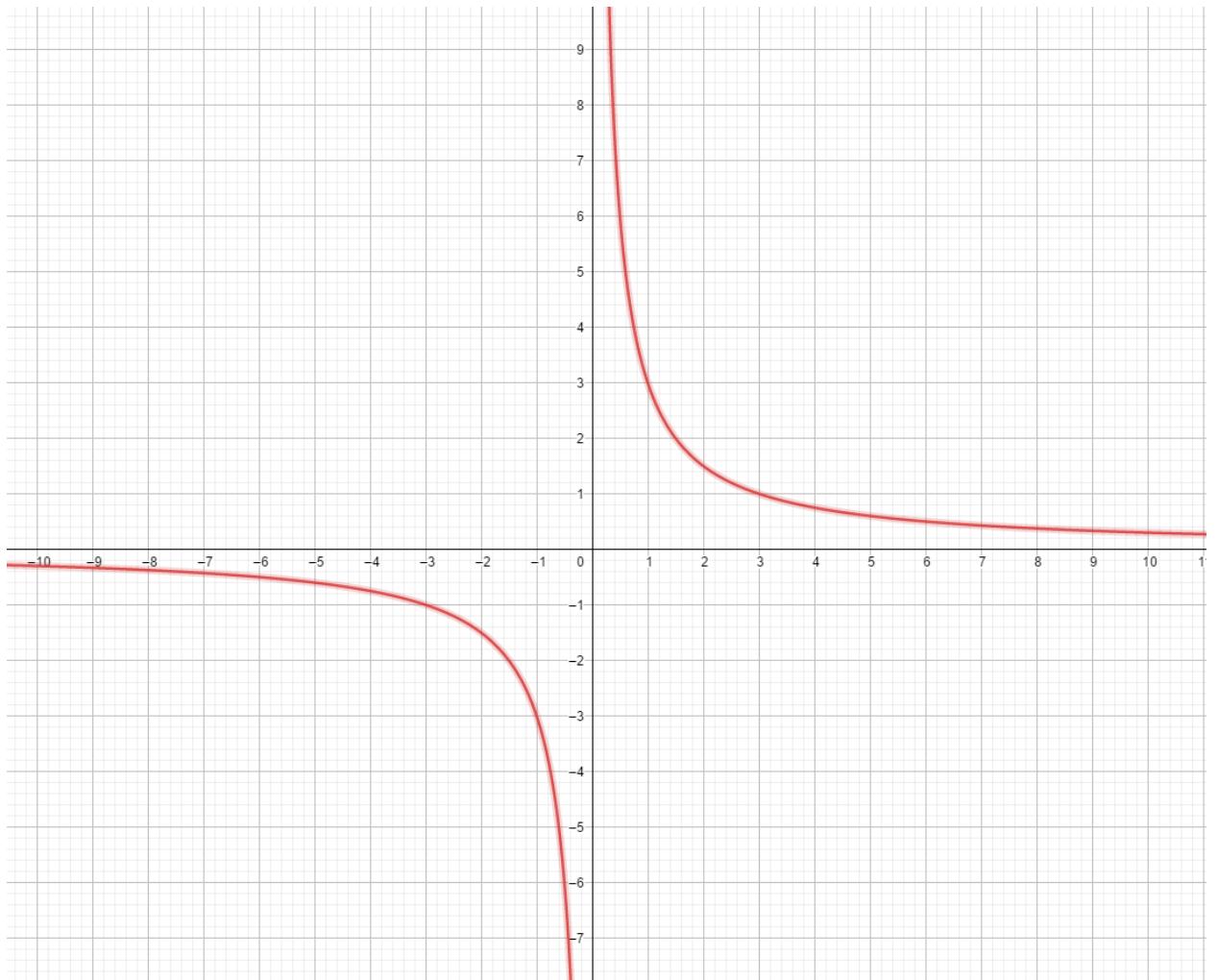


А вот так выглядит сам график. Не забудьте его подписать.



Задача 3. Построить график функции $y = \frac{3}{x}$

Чтобы построить график обратной пропорциональности, нам понадобиться ввод дроби. Вводим $y=3/x$ и жмем клавишу Enter.



Задание 4. Построить график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ и определить, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком три общие точки.

Рассмотрим два случая, когда $x \geq 0$ и $x < 0$.

При $x \geq 0$ имеем $y = x^2 - 3x - x \Leftrightarrow y = x^2 - 4x$.

При $x < 0$ имеем $y = x^2 + 3x - x \Leftrightarrow y = x^2 + 2x$.

Составим кусочно-заданную функцию $y = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2 + 2x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Ну а теперь построим график этой функции.

Все, что нам было построено до этого можно скрыть (смотри задание №2), либо удалить. Для этого просто нажимаем на три точки возле надписи в поле ввода:

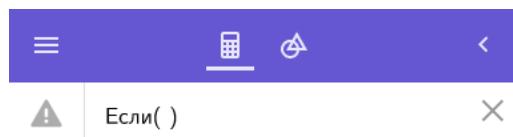


Выбираем пункт «Удалить».

Итак, приступим к построению.

Как вы видите, у нас есть две функции и два условия. Чтобы ввести их нам понадобиться специальная операция условия.

В поле ввода пишем: Если()

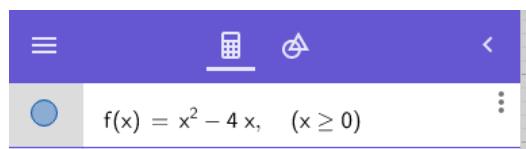


А теперь нужно записать то, что мы хотим построить. Для начала построим ту часть графика, которая выполняется при условии $x \geq 0$.

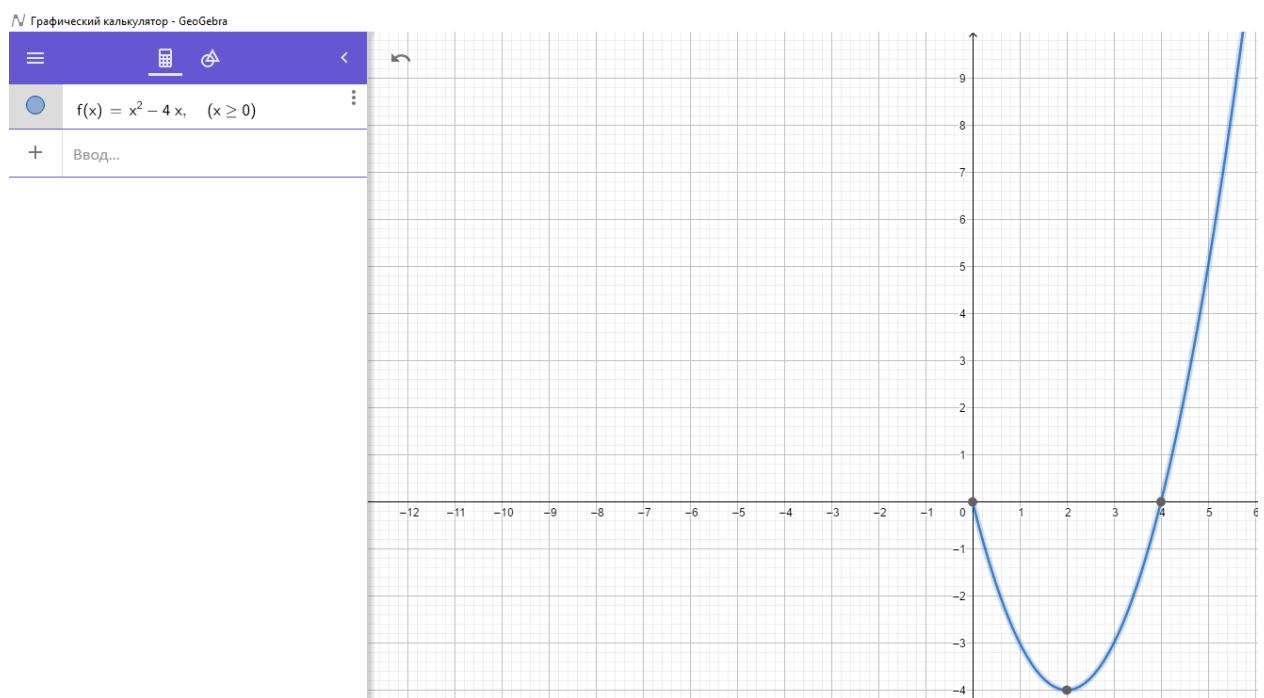
Ставим курсор между скобок и набирает следующий текст

$$x \geq 0, x^2 - 4x$$

и нажимаем клавишу Enter. Вот то, что в итоге получится в поле ввода



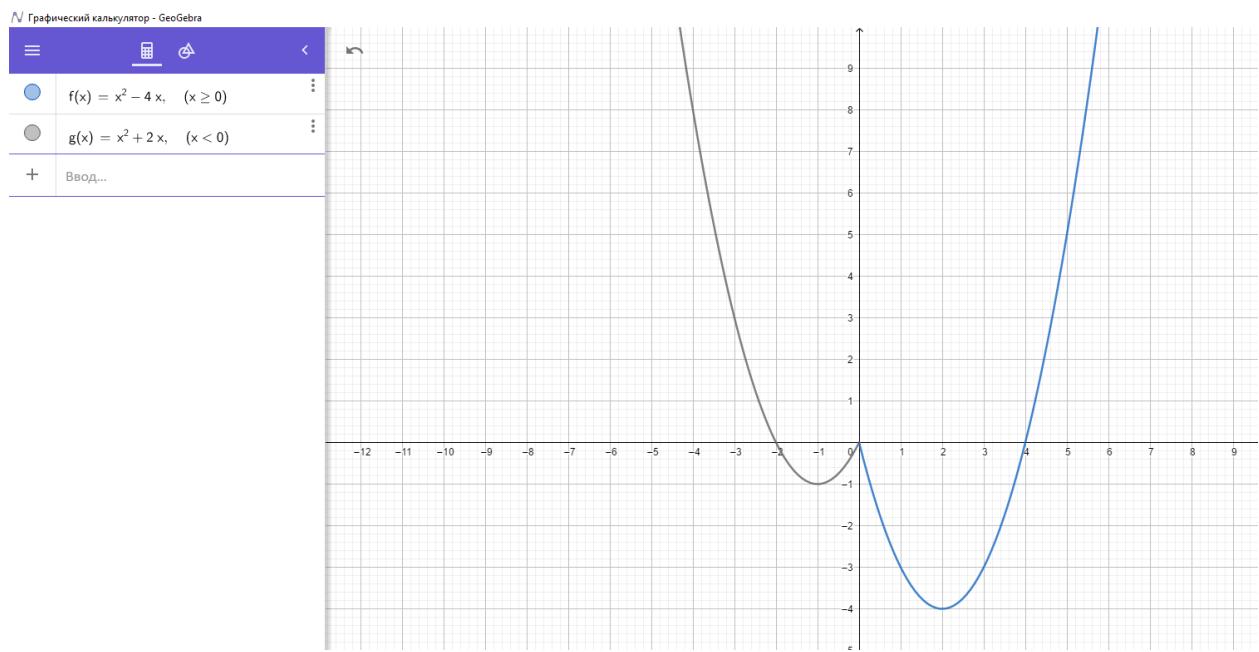
А вот и сам график



Осталось построить вторую часть функции.

Вводим: Если($x < 0, x^2 + 2x$) и жмем клавишу Enter.

И итоге получаем график функции.



Теперь разберемся с функцией $y = a$. Это линейная функция, ее графиком является прямая, параллельная оси x .

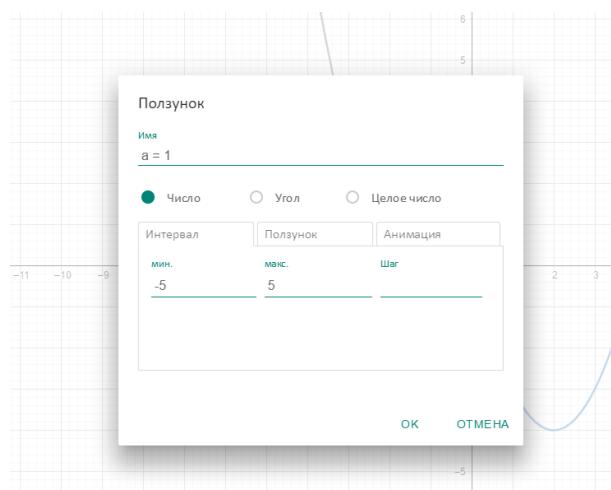
Однако, значение параметра a нам не дано. Поэтому вместо a может быть абсолютно любое число. Как это показать в программе Geogebra?

И тут нам снова нужно перейти на панель «Геометрия» (смотри задание №1).

Выбираем кнопку «Ползунок».

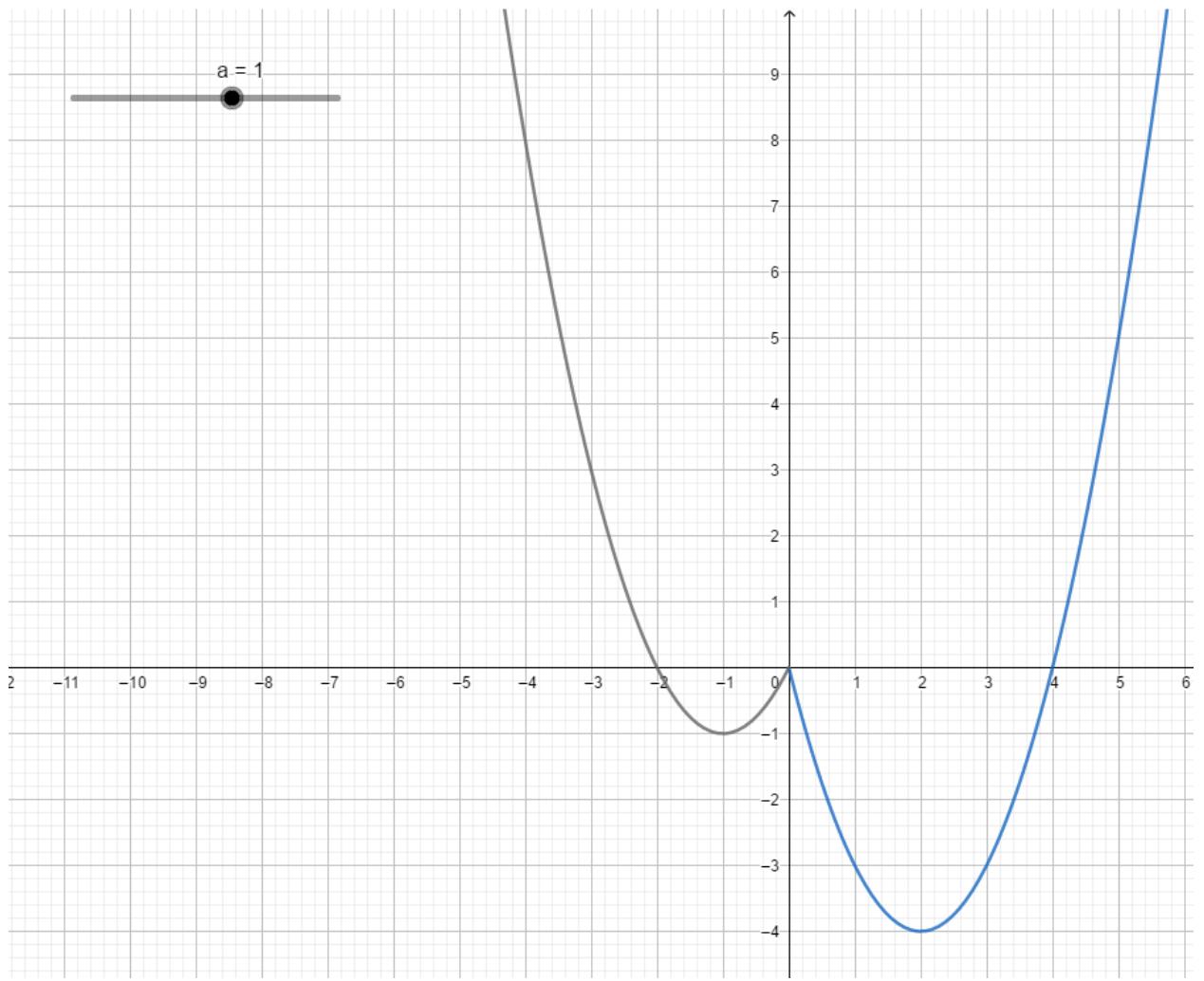


Теперь в любом месте координатной плоскости кликаем мышкой. Откроется новое окно, где можно выставить параметры для ползунка.



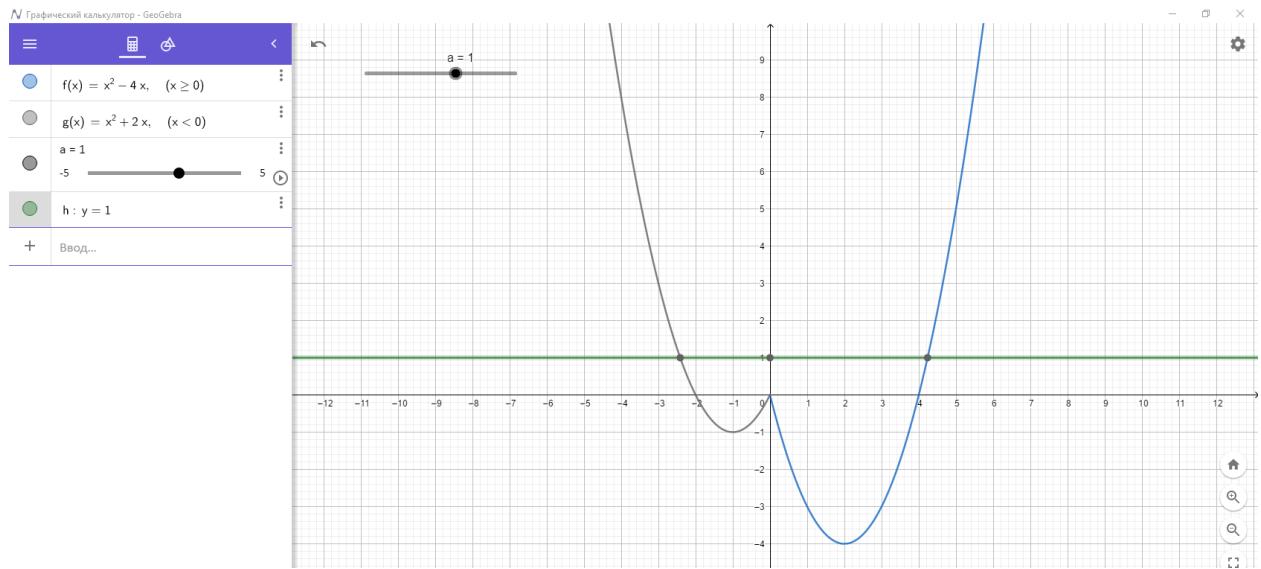
Оставим все так, как есть и нажмем кнопку OK.

Вот что в итоге у нас получилось.

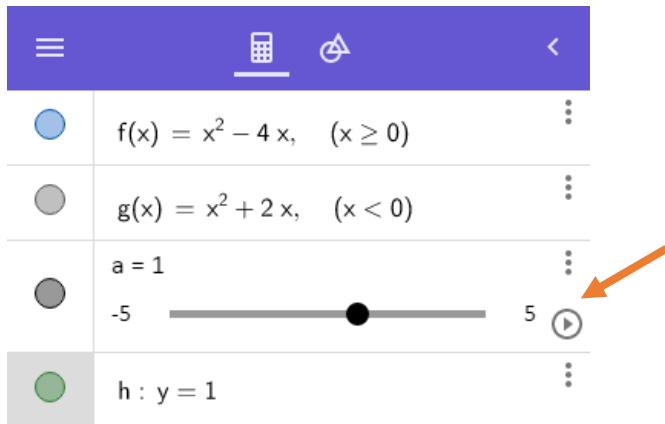


Возвращаемся на панель инструментов «Алгебра» и вводим $y = a$. Жмем клавишу Enter. Появилась прямая.

Теперь вместо a у нас будет стоять то значение, которое задается по умолчанию, т.е. 1.



Осталось запустить анимацию, чтобы наглядно продемонстрировать, при каких значениях a сколько будет точек пересечения. Для запуска анимации нажмите значок «Треугольник» рядом с ползунком на панели ввода. Прямая начнем двигать вверх и вниз.



Нам нужно было определить, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком данной функции три общих точки.

А можно ли было обойтись без кусочно-заданной функции? Конечно, можно было. Для этого нам всего лишь нужно было правильно ввести формулу, содержащую модуль $y = x^2 - 3|x| - x$.

Знак модуля можно ввести разными способами.

1. Просто набрать $y = x^2 - 3 * |x| - x$ с клавиатуры.
2. Набрать $y = x^2 - 3 * |x| - x$, используя значок «модуль» на нижней панели инструментов.
3. Набрать $y = x^2 - 3 * abs(x) - x$, где abs – это функция, задающая модуль.

Задание 1.

Построить графики функций на одном чертеже:

$$\begin{aligned}
 y &= -0,25x^2 + 13, & x \in [-2; 2]; \\
 y &= -x + 6, & x \in [-3; -1]; \\
 y &= x + 6, & x \in [1; 3]; \\
 y &= \frac{1}{72}x^2 - 6, & x \in [-6; 6]; \\
 y &= -2x^2 + 13,5, & x \in [-0,5; 0,5]; \\
 y &= 2,5x + 9,5, & x \in [-7; -6]; \\
 y &= -2,5x + 9,5, & x \in [6; 7]; \\
 y &= -8, & x \in [-7; 7]; \\
 y &= 7, & x \in [-1; 1].
 \end{aligned}$$

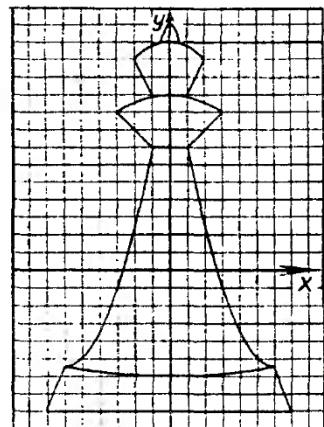


Рис. 4