

В помощь учителю

Сефибеков Сефибек Рамазанович

ПАРАМЕТРЫ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

(современные образовательные технологии-элективный курс)

Дагестан-Кашкент. 2022



Сефибек Рамазанович
Сефибеков



Сефибеков

Сефибек Рамазанович

Почетный работник общего образования РФ,
Заслуженный учитель Республики Дагестан,
Учитель высшей категории,
Кандидат педагогических наук,
МКОУ «Кашкентская СОШ» Хивского района
Республики Дагестан.

Автор более **100** научных и методических работ,
регулярно публикуются в журналах «Квант», «Математика в
школе», «Математика»

Научные работы автора посвящены исследовательской
деятельности школьников в урочной и внеурочной деятельности
по математике на основе авторских элективных разработок
«За страницами школьного учебника».

ИТОГИ 56-ЛЕТНЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ШКОЛЕ

Всем известно, как трудно сделать что-нибудь стоящее, поэтому я считаю себя счастливым, что мне удалось написать множество научно-методических, теоретических и педагогических трудов по математике. Но тщеславие отступает на задний план, когда думаешь о том, сколько проблем ты пытался вновь и вновь решать, но так и не смог. Ясно, что никто не может претендовать на монополию в математических способностях или на создание прекрасного в математике. В беге не всегда одерживает победу быстрее, а в борьбе-сильнейший!

Вся моя жизнь в математике была связана с тяжелым трудом. Я всегда знал, что нет королевского пути к математическим знаниям или к математическим открытиям. Но этот труд стоит того, чтобы его предпринимать. Для меня не существует большей радости, чем преодолевать препятствия и добиваться результата, и вероятно, каждый чувствует себя счастливее, когда делает работу, которая ему нравится (психологами доказано, что, если такая работа дает свои результаты, то- это долголетие для человека!).

Я часто испытывал чувство восхищения и удивления красотой математики. Не могу придумать более подходящей аналогии, чем восхождение на вершины гор. Огромные усилия тут неизбежны. Но как прекрасно, проложив новый путь, который казался столь трудным, любоваться с вершины раскинувшимся перед тобой пейзажем и наслаждаться его красотой. В зрелом возрасте оглядываясь назад и размышляя над математикой с новых точек зрения, иногда удивляешься собственным старым результатам и почти не веришь, что они принадлежат тебе. Они представляются тебе самостоятельными сущностями, не зависимыми от их автора. Иногда даже приятно наблюдать так свои работы, забывая о собственном авторстве.

Я полностью удовлетворен своей 56-летней учительской работой, и не желал бы для себя никакой другой судьбы. Некоторые учителя, удалившись на покой или даже несколько раньше, кажется, утрачивают интерес к работе, которая их занимала много лет. Необъяснимо, как они могут так полностью порывать с интересами своей предыдущей жизни. Что же касается меня, то я рад продолжать свою работу и написать научно-педагогические труды. Но я буду удовлетворен и если просто сохраню любовь к профессии учителя математики!

**Сефибек Рамазанович
Сефибеков**

СОДЕРЖАНИЕ

От автора	1
Первичное знакомство с параметром	2
Квадратные уравнения с параметром	16
Иррациональные уравнения и неравенства с параметром	35
Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметром	48
Литература	64

От автора.

Тема «параметры» является самой наболевшей и трудной темой курса математики средней школы (и не только!). Причина в том, что она не отражена в школьных учебниках математики. Однако, при сдаче ЕГЭ профильного уровня требуется знания по этой теме (задание 18). В связи с этим, здесь привожу методическую разработку данной темы. Изложение материала простое и доступное учащимся средней школы. Учителя могут ознакомить учащихся с данным материалом на элективных занятиях после изучения программного материала. Затрагиваемый здесь вопрос полезен также и студентам педагогических вузов по специальности «Математика».

Февраль, 2022г.

С.Р.Сефибеков.

ПЕРВИЧНОЕ ЗНАКОМСТВО С ПАРАМЕТРОМ

Задача с параметром — исследовательская задача.

С. Р. Сефибеков

Задачи с параметром встречаются в различных разделах математики (при решении уравнений, неравенств, систем уравнений и т. д.) и в заданиях ЕГЭ. Однако в школьном курсе математики таким задачам внимания уделяется недостаточно.

В курсе алгебры 7 класса рассматривается линейное уравнение с одной переменной. С этого вопроса можно начать ознакомление учащихся с параметром (на уроке, на кружковых и элективных занятиях).

Что такое параметр? Чтобы ответить на этот вопрос, начнём с линейного уравнения.

Линейным уравнением с одной переменной называют уравнение вида

$$ax = b, \quad (*)$$

где a и b — некоторые числа, x — переменная; a называют коэффициентом при переменной x , b — свободным членом.

Сколько решений может иметь уравнение (*)?

1. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{b}{a}.$$

Пример 1. $2x = 6$, $x = \frac{6}{2}$, $x = 3$.

Пример 2. $2x = 0$, $x = \frac{0}{2}$, $x = 0$.

2. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение решений не имеет: $0 \cdot x \neq b$, так как $0 \cdot x = 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, а $b \neq 0$. Значит, $x \in \emptyset$ ($\emptyset$ — пустое множество).
3. Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$0 \cdot x = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

так как произведение любого числа x и нуля есть ноль.

В уравнении (*) числа a и b будем называть иначе, а именно параметрами!

Замечание. Не следует путать параметры a и b с переменной (неизвестной) x .

Универсального метода решения задач с параметрами не существует. Решить задачу с параметром означает, что для всех допустимых значений параметра требуется найти значения переменной x .

Приведём общую схему решения линейного уравнения (*) с параметром.

Исследуем коэффициент a при переменной x :

- ✓ если $a = 0$, то имеем уравнение $0 \cdot x = b$, которое решаем при каждом значении параметра b ;
- ✓ если $a \neq 0$, то, решая уравнение (*), получим:

$$x = \frac{b}{a}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите уравнение

$$(a^2 + 2)x = b + 1.$$

Решение

Поскольку $a^2 + 2 > 0$ при всех $a \in \mathbb{R}$, то уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{b+1}{a^2+2}.$$

Ответ. При $a \in \mathbb{R}$ $x = \frac{b+1}{a^2+2}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$(a-1)ax = 3(a^2-1).$$

Решение

Если коэффициент при переменной x равен нулю, то имеем:

$$(a-1)a = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} a = 0, \\ a - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 1. \end{cases}$$

При $a = 0$ имеем: $0 \cdot x = -3$, $x \in \emptyset$.

При $a = 1$ имеем: $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

При $a \neq 0$ и $a \neq 1$ имеем:

$$x = \frac{3(a^2-1)}{(a-1)a} = \frac{3(a-1)(a+1)}{(a-1)a} = \frac{3a+3}{a}.$$

Ответ. При $a = 0$ корней нет; при $a = 1$ $x \in \mathbb{R}$;
при $a \neq 0$ и $a \neq 1$ $x = \frac{3a+3}{a}$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a^2 + a - 2)x = a^2 - 1$$

не имеет решений.

Решение

Уравнение не имеет решений при условии

$$\begin{cases} a^2 + a - 2 = 0, \\ a^2 - 1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a = -2, \\ a = 1; \\ a^2 \neq 1; \end{cases} & \begin{cases} a = -2, \\ a^2 \neq 1, \\ a = 1, \\ a^2 \neq 1; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a = -2, \\ (-2)^2 = 4 \neq 1 \text{ (истинно)}, \\ a = 1, \\ 1^2 \neq 1 \text{ (ложно)}, \end{cases} \end{cases}$$

откуда $a = -2$.

Ответ. При $a = -2$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a^2 + 6a - 7)x = a^2 - 49$$

имеет одно решение.

Решение

Уравнение имеет одно решение при

$$a^2 + 6a - 7 \neq 0,$$

откуда $a \neq -7$; $a \neq 1$.

Ответ. При $a \neq -7$ и при $a \neq 1$.

Пример 5. Решите уравнение

$$(a^2 - 7a + 12)x = 4(a - 3)$$

в зависимости от параметра a .

Решение

1) $a^2 - 7a + 12 = 0$, откуда $a = 3$; $a = 4$.

При $a = 3$ $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$;

при $a = 4$ $0 \cdot x = 4$, $x \in \emptyset$.

2) $a^2 - 7a + 12 \neq 0$, откуда $a \neq 3$; $a \neq 4$.

При $a \neq 3$ и $a \neq 4$ имеем единственное решение

$$x = \frac{4(a-3)}{a^2-7a+12} = \frac{4(a-3)}{(a-3)(a-4)}, \quad x = \frac{4}{a-4}.$$

Ответ. При $a = 3$ $x \in \mathbb{R}$; при $a = 4$ корней нет; при $a \neq 3$, $a \neq 4$ $x = \frac{4}{a-4}$.

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение

$$a(a^3 + 1)x = a^2 - 1$$

имеет более одного решения?

Решение

Требование задачи выполняется, если

$$\begin{cases} a(a^3 + 1) = 0, \\ a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} \begin{cases} a = 0, \\ a^3 + 1 = 0, \\ a^2 = 1; \end{cases} & \begin{cases} a = 0, \\ a = -1, \\ a^2 = 1; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a = 0, \\ a^2 = 1, \\ a = -1, \\ a^2 = 1; \end{cases} & \begin{cases} a = 0, \\ 0^2 = 1 \text{ (ложно)}, \\ a = -1, \\ (-1)^2 = 1 \text{ (истинно)}, \end{cases} \end{cases}$$

откуда $a = -1$.

Ответ. При $a = -1$.

Пример 7. Найдите все значения параметра a из промежутка $(-12; 4]$, при которых уравнение

$$(a+2)(a-2)(a+1)x = a^2 - 4$$

имеет единственное решение.

Решение

1) Если $a \neq \pm 2$, то $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Если $a = -1$, то $0 \cdot x = -3$, $x \in \emptyset$.

3) Если $a \neq \pm 2$, $a \neq -1$, то

$$x = \frac{a^2 - 4}{(a+2)(a-2)(a+1)}, \text{ или } x = \frac{1}{a+1}.$$

По условию $a \in (-12; 4]$. Но $a = \pm 2$, $a = -1$ не дают единственного решения, равного $\frac{1}{a+1}$. Исключая эти значения из промежутка $(-12; 4]$, получим ответ.

Ответ. $a \in (-12; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 4]$.

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$(2-a)x = (a+1)(a-2)$$

имеет решение, большее 4? Найдите это решение.

Решение

Если $2-a=0$, $a=2$, то

$$0 \cdot x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если $a \neq 2$, то

$$x = \frac{(a+1)(a-2)}{2-a}, \text{ или } x = -a-1.$$

По условию задачи

$$x > 4. \quad (*)$$

Определим, при каких значениях a будет выполняться это условие.

Подставляя в $(*)$

$$x = -a-1,$$

получим:

$$-a-1 > 4, \quad a < -5.$$

Ответ. $x > 4$ при $a \in (-\infty; -5)$; $x = -a-1$.

УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К ЛИНЕЙНЫМ

В примерах 1-8 не рассматривалась область допустимых значений переменной x (ОДЗ уравнения).

Перейдём к примерам, где ОДЗ играет существенную роль.

Пример 9. Решите уравнение

$$\frac{1}{x+3} = a$$

для всех значений параметра a .

Решение

ОДЗ: $x \neq -3$.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$ax + 3a = 1,$$

$$ax = 1 - 3a. \quad (*)$$

Решим уравнение $(*)$ как уравнение с параметром a .

Если $a = 0$, то $0 \cdot x = 1$, $x \in \emptyset$.

Если $a \neq 0$, то $x = \frac{1-3a}{a}$.

Теперь проверим, существует ли значение параметра a , при котором $x = -3$. Для этого подставим значение $x = -3$ в уравнение $(*)$, получим: $-3a = 1 - 3a$, $0 = 1$ — ложно!

Следовательно, не существует таких значений параметра a , при которых $x = -3$. Поэтому ответ запишем следующим образом: при $a = 0$

$x \in \emptyset$; при $a \neq 0$ $x = \frac{1-3a}{a}$.

Ответ. При $a = 0$ корней нет; при $a \neq 0$

$$x = \frac{1-3a}{a}.$$

Пример 10. Для всех значений параметра a решите уравнение $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{a-1} = 3$.

Решение

ОДЗ: $x \neq 2$.

При $a-1=0$, $a=1$ уравнение не имеет смысла.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$(3a-5)x = 7a-11. \quad (*)$$

Если $3a-5=0$, $a=\frac{5}{3}$, то из $(*)$ следует, что

$$0 \cdot x = \frac{2}{3},$$

то есть $x \in \emptyset$.

Если $a \neq \frac{5}{3}$, то

$$x = \frac{7a-11}{3a-5}.$$

Проанализируем ОДЗ. Если $x=2$, то из уравнения $(*)$ имеем:

$$6a-10=7a-11,$$

откуда $a=1$.

Следовательно, при $a=1$ получим запрещённое значение.

Учитывая все решения, получим ответ.

Ответ. При $a=\frac{5}{3}$ и при $a=1$ корней нет; при $a \neq \frac{5}{3}$ $x = \frac{7a-11}{3a-5}$.

Пример 11. Для всех значений параметра a решите уравнение $\frac{ax+4}{x-4} = 5$.

Решение

ОДЗ: $x \neq 4$.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$ax+4=5x-20,$$

$$(a-5)x = -24. \quad (*)$$

Если $a-5=0$, $a=5$, то $0 \cdot x = -24$, $x \in \emptyset$.

Если $a \neq 5$, то $x = -\frac{24}{a-5}$.

Согласно ОДЗ, переменная $x \neq 4$. Найдём те значения параметра a , при которых $x=4$. Для этого подставим $x=4$ в $(*)$, получим:

$$(a-5) \cdot 4 = -24, \quad a = -1.$$

Чтобы выполнялось ОДЗ, параметр a не должен быть равен -1 . Тогда при $a \neq -1$ и $a \neq 5$

$$x = -\frac{24}{a-5}.$$

Ответ. При $a=-1$ и при $a=5$ корней нет; при $a \neq -1$ и при $a \neq 5$ $x = -\frac{24}{a-5}$.

Пример 12. Для всех значений параметра a решите уравнение

$$\frac{3x+a}{x-3} = a+1$$

Решение

ОДЗ: $x \neq 3$.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$3x+a = ax-3a+x-3, \text{ или } (a-2)x = 4a+3. (*)$$

Если $a-2=0$, $a=2$, то уравнение (*) имеет вид: $0 \cdot x = 11$, $x \in \emptyset$.

Если $a \neq 2$, то

$$x = \frac{4a+3}{a-2}$$

и, с учётом ОДЗ, получим:

$$\frac{4a+3}{a-2} \neq 3, \quad 4a+3 \neq 3a-6,$$

откуда $a \neq -9$.

Ответ. При $a=2$, $a=-9$ корней нет; при $a \neq 2$, $a \neq -9$ $x = \frac{4a+3}{a-2}$.

Пример 13. Для всех значений параметра a решите уравнение $\frac{ax+4}{a-3} = 2$.

Решение

Поскольку выражение $a-3$ с параметром a стоит в знаменателе дроби, то $a-3 \neq 0$, $a \neq 3$. При $a=3$ уравнение не имеет смысла.

Пусть $a \neq 3$. Преобразуем уравнение, получим:

$$ax+4 = 2a-6, \quad ax = 2a-10.$$

Если $a=0$, то $0 \cdot x = -10$, $x \in \emptyset$.

Если $a \neq 0$, то $x = \frac{2a-10}{a}$.

Ответ. При $a=0$, $a=3$ корней нет; при $a \neq 0$, $a \neq 3$ $x = \frac{2a-10}{a}$.

Пример 14. Для всех значений параметра a решите уравнение

$$\frac{x+3a}{(x-2)a} = 4.$$

Решение

ОДЗ: $x \neq 2$.

При $a=0$ уравнение не имеет смысла.

При $x \neq 2$ и $a \neq 0$ имеем:

$$x+3a = 4ax-8a, \quad (4a-1)x = 11a.$$

Если $4a-1=0$, $a = \frac{1}{4}$, то $0 \cdot x = \frac{11}{4}$, $x \in \emptyset$.

Если $a \neq \frac{1}{4}$, то

$$x = \frac{11a}{4a-1}. (*)$$

Проверим, удовлетворяет ли x из (*) ОДЗ, имеем:

$$\frac{11a}{4a-1} \neq 2, \quad 11a \neq 8a-2, \quad a \neq -\frac{2}{3},$$

то есть при $a = -\frac{2}{3}$ $x \in \emptyset$. Поэтому если $a \neq 0$, то

$$x = \frac{11a}{4a-1}.$$

Ответ. При $a \neq -\frac{2}{3}$, $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{4}$ $x = \frac{11a}{4a-1}$; при $a = -\frac{2}{3}$, $a = \frac{1}{4}$, $a = 0$ корней нет.

Пример 15. Решите уравнение

$$\frac{x+a}{ax+3} = 2$$

с параметром a .

Решение

ОДЗ: $ax+3 \neq 0$.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$x+a = 2ax+6, \quad (2a-1)x = a-6.$$

Если $2a-1=0$, $a = \frac{1}{2}$, то

$$0 \cdot x = -5\frac{1}{2}, \quad x \in \emptyset.$$

Если $a \neq \frac{1}{2}$, то

$$x = \frac{a-6}{2a-1}. (*)$$

Подставляя выражение (*) в ОДЗ, получим:

$$\frac{a(a-6)}{2a-1} + 3 \neq 0, \quad a^2 \neq 3,$$

то есть $a \neq \pm\sqrt{3}$.

Ответ. При $a \neq \frac{1}{2}$, $a \neq \pm\sqrt{3}$ $x = \frac{a-6}{2a-1}$; при $a = \frac{1}{2}$, $a = \pm\sqrt{3}$ корней нет.

Пример 16. Решите уравнение

$$\frac{x+a}{(a+2)x} = 1$$

с параметром a при условии, что $x \in [-5; 1]$.

Решение

ОДЗ: $x \neq 0$.

При $a+2=0$, $a=-2$ уравнение не имеет смысла.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} x+a &= (a+2)x, \\ (a+1)x &= a. \end{aligned} \quad (1)$$

Если $a+1=0$, $a=-1$, то

$$0 \cdot x = -1, \quad x \in \emptyset.$$

Если $a \neq -1$, также и $a \neq -2$, из уравнения (1) находим:

$$x = \frac{a}{a+1}.$$

Согласно ОДЗ $x \neq 0$, значит,

$$\frac{a}{a+1} \neq 0,$$

откуда $a \neq 0$.

Так как по условию $x \in [-5; 1]$, то определим, при каких $a \neq -2; -1; 0$ выполняется это условие. Для этого решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{a}{a+1} \geq -5, & \frac{a+\frac{5}{6}}{a+1} \geq 0, \\ \frac{a}{a+1} < 1; & \frac{1}{a+1} > 0, \end{cases}$$

откуда $a + \frac{5}{6} \geq 0$, $a \geq -\frac{5}{6}$;

$$a \in \left[-\frac{5}{6}; +\infty\right). \quad (2)$$

Исключая из (2) запрещённое значение $a=0$, получим окончательно: если

$$a \in \left[-\frac{5}{6}; 0\right) \cup (0; +\infty),$$

то $x = \frac{a}{a+1}$.

Ответ. При $a \in \left[-\frac{5}{6}; 0\right) \cup (0; +\infty)$ $x = \frac{a}{a+1}$; при

$a \in (-\infty; -2] \cup \left[-2; -\frac{5}{6}\right) \cup \{0\}$ корней нет.

Пример 17. При каких значениях параметра a выражение $\frac{ax-4}{5x+a}$ равно 4 хотя бы при одном значении x ?

Решение

Решим уравнение

$$\frac{ax-4}{5x+a} = 4.$$

ОДЗ: $5x+a \neq 0$, $x \neq -\frac{a}{5}$.

Преобразуем уравнение, получим:

$$ax-4=20x+4a, \quad (a-20)x=4a+4.$$

Если $a-20=0$, $a=20$, то

$$0 \cdot x = 84, \quad x \in \emptyset.$$

Если $a \neq 20$, то

$$x = \frac{4a+4}{a-20}. \quad (*)$$

Согласно ОДЗ

$$x \neq -\frac{a}{5},$$

поэтому, подставляя значение x из равенства (*), решим неравенство относительно a :

$$\frac{4a+4}{a-20} \neq -\frac{a}{5}.$$

Имеем:

$$20a+20 \neq -a^2+20a,$$

откуда $a^2 \neq -20$. Значит, для любого $a \neq 20$ ОДЗ выполняется.

Ответ. a — любое число, кроме 20.

Пример 18. При каких значениях параметра a выражение $\frac{8x+a}{ax+4}$ не равно 1 ни при каких значениях x ?

Решение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{8x+a}{ax+4} = 1. \quad (*)$$

Определим при каких x это уравнение не имеет решений.

ОДЗ: $ax+4 \neq 0$.

Преобразуем уравнение (*), получим:

$$8x+a=ax+4,$$

$$(a-8)x=a-4.$$

Если $a-8=0$, $a=8$, то $0 \cdot x=4$, $x \in \emptyset$.

Если $a \neq 8$, то $x = \frac{a-4}{a-8}$ и согласно ОДЗ

$$\frac{a(a-4)}{a-8} + 4 \neq 0.$$

Далее имеем:

$$a^2-4a+4a-32 \neq 0, \quad a^2 \neq 32, \quad a \neq \pm 4\sqrt{2}.$$

Уравнение (*) не будет иметь корней при

$$a = \pm 4\sqrt{2}.$$

Ответ. При $a=8$ и при $a = \pm 4\sqrt{2}$.

УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ И ПАРАМЕТРОМ

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, применяют следующие методы:

- ✓ раскрытие модуля по определению;
- ✓ возведение обеих частей уравнения в квадрат;
- ✓ метод интервалов (метод разбиения на промежутки);
- ✓ графический метод.

Метод интервалов заключается в следующем:

- 1) находят нули подмодульных выражений;
- 2) откладывают полученные значения на числовой прямой, которая при этом разбивается на промежутки, в каждом из которых свой знак подмодульного выражения;
- 3) решают уравнение на каждом из этих промежутков.

На практике метод интервалов обычно применяют тогда, когда уравнение содержит более одного модуля.

Решим несколько уравнений с параметром a .

Пример 19. Решите уравнение $|x-2|=x+a$.

Решение

Раскроем модуль по определению. Получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x-2 = x+a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 2, \\ 2-x = x+a, \end{cases} \quad (*)$$

Из второй системы совокупности (*) найдём значения параметра a , при которых $x < 2$:

$$x = \frac{2-a}{2}, \quad \frac{2-a}{2} < 2, \quad 2-a < 4, \quad a > -2.$$

Ответ. При $a = -2$ $x \in [2; +\infty)$; при $a > -2$ $x = \frac{2-a}{2}$; при $a < -2$ корней нет.

Пример 20. Решите уравнение $|3x+a|=x-3$.

Решение

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 3x \geq -a, \\ 3x+a = x-3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x < -a, \\ -3x-a = x-3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{a}{3}, \\ x = -\frac{a+3}{2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x < -\frac{a}{3}, \\ x = \frac{3-a}{4}. \end{cases} \quad (2)$$

Из системы (1) имеем:

$$-\frac{a+3}{2} \geq -\frac{a}{3}, \quad -3a-9 \geq -2a, \quad a \leq -9.$$

Значит, при $a \leq -9$ $x = -\frac{a+3}{2}$.

Из системы (2) имеем:

$$\frac{3-a}{4} < -\frac{a}{3}, \quad 9-3a < -4a, \quad a < -9.$$

Значит, при $a < -9$ $x_1 = -\frac{a+3}{2}$, $x_2 = \frac{3-a}{4}$;

при $a = -9$ $x = -6$. При других значениях параметра a корней нет.

Ответ. При $a < -9$ $x_1 = -\frac{a+3}{2}$, $x_2 = \frac{3-a}{4}$;

при $a = -9$ $x = -6$; при $a > -9$ корней нет.

Пример 21. Решите уравнение $a|x+3|=4$.

Решение

Пусть параметр $a = 0$. Тогда уравнение принимает вид: $0 \cdot |x+3| = 4$, откуда $x \in \emptyset$.

Если $a < 0$, то $a|x+3| \leq 0$, то есть $a|x+3| \neq 4$ — уравнение корней не имеет.

Если $a > 0$, то уравнение равносильно следующему:

$$|x+3| = \frac{4}{a}.$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} x+3 = \frac{4}{a}, \\ x+3 = -\frac{4}{a}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{4-3a}{a}, \\ x = \frac{-4-3a}{a}. \end{cases}$$

Ответ. При $a \in (-\infty; 0]$ корней нет; при $a \in (0; +\infty)$ $x_1 = \frac{4-3a}{a}$, $x_2 = \frac{4+3a}{a}$.

Пример 22. Решите уравнение $a|x+1|=a^2+a$.

Решение

Раскрывая модуль, получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases} ax = a^2, \\ x \geq -1, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -ax = a^2 + 2a, \\ x < -1. \end{cases} \quad (2)$$

Решим систему (1). Из уравнения $ax = a^2$ имеем:

если $a = 0$, то $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, и с учётом $x \geq -1$ получим: при $a = 0$ $x \in [-1; +\infty)$;

если $a \neq 0$, то $x = \frac{a^2}{a} = a$, с учётом $x \geq -1$ имеем $a \geq -1$.

Значит, при $a \in [-1; +\infty)$ $x = a$.

Решим систему (2). Из уравнения

$$-ax = a^2 + 2a$$

имеем:

если $a = 0$, то $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, и с учётом $x < -1$ получим: при $a = 0$ $x \in (-\infty; -1)$;

если $a \neq 0$, то $x = -a - 2$, с учётом $x < -1$ получим: $-a - 2 < -1$, $a > -1$. Значит, при $a \in (-1; +\infty)$ $x = -a - 2$.

Объединяя решения систем (1) и (2), получим ответ.

Ответ. При $a = 0$ $x \in (-\infty; +\infty)$; при $a = -1$ $x = -1$; при $a \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ $x_1 = -a - 2$, $x_2 = a$; при $a \in (-\infty; -1)$ корней нет.

Пример 23. Решите уравнение $|x-a| = |x-3|$.

Решение

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим уравнение, равносильное данному:

$$x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 6x + 9, \text{ или } (2a - 6)x = a^2 - 9.$$

Пусть

$$2a - 6 = 0, \quad a = 3.$$

Тогда имеем:

$$0 \cdot x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть $a \neq 3$, тогда

$$x = \frac{a^2 - 9}{2a - 6} = \frac{(a-3)(a+3)}{2(a-3)}, \quad x = \frac{a+3}{2}.$$

Ответ. При $a = 3$ $x \in \mathbb{R}$; при $a \neq 3$ $x = \frac{a+3}{2}$.

Пример 24. Решите уравнение $|x+2| + |x-3| = a$

Решение

Способ 1 (аналитический). Решим уравнение методом разбиения на промежутки (методом интервалов). $x+2=0$, $x=-2$; $x-3=0$, $x=3$.

Таким образом, числовая ось разбивается на три интервала:

$$1) \quad x \in (-\infty; -2);$$

$$2) \quad x \in [-2; 3];$$

$$3) \quad x \in (3; +\infty).$$

Рассмотрим заданное уравнение на интервале 1), то есть при $x < -2$. Для таких значений переменной x $x+2 < 0$ и $x-3 < 0$. Поэтому получаем уравнение

$$-x-2-x+3=a, \quad -2x+1=a,$$

$$\text{откуда } x = \frac{1-a}{2}.$$

Найдём значения параметра a , при которых $x \in (-\infty; -2)$. Для этого решим неравенство

$$\frac{1-a}{2} < -2, \quad 1-a < -4, \quad a > 5.$$

Значит, при $a \in (5; +\infty)$ корень заданного уравнения $x = \frac{1-a}{2}$ будет принадлежать промежутку $x \in (-\infty; -2)$.

Рассмотрим заданное уравнение на интервале 2). Здесь первый модуль раскрывается как положительный, а второй как отрицательный. Получим следующее уравнение:

$$x+2-x+3=a,$$

откуда $a = 5$. Таким образом, при этом значении параметра заданное уравнение имеет бесконечное множество корней, принадлежащих отрезку $[-2; 3]$.

На третьем интервале для $x \in (3; +\infty)$ оба модуля раскрываются как положительные, получаем уравнение:

$$x+2+x-3=a, \text{ или } 2x-1=a,$$

$$\text{откуда } x = \frac{a+1}{2}.$$

Значение параметра a , при котором

$$x \in (3; +\infty),$$

находим из неравенства

$$\frac{a+1}{2} > 3.$$

Имеем: $a+1 > 6$, откуда $a > 5$. Таким образом, при $a > 5$ корень заданного уравнения, равный

$$x = \frac{a+1}{2},$$

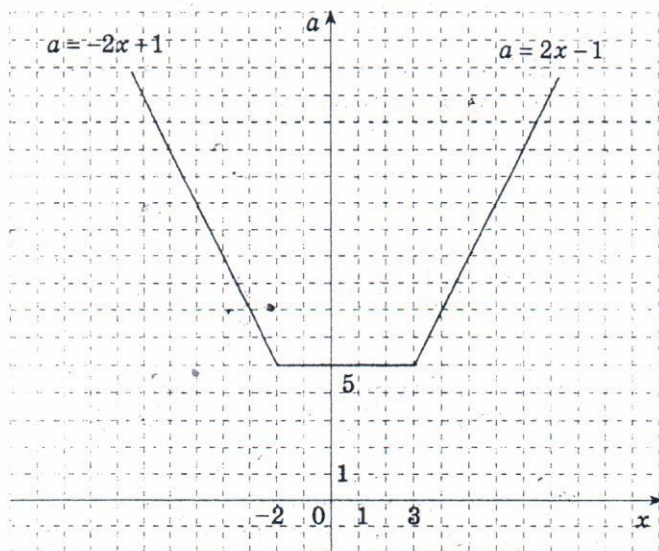
принадлежит промежутку $(3; +\infty)$.

Объединяя решения на всех трёх интервалах, получим: при $a \in (-\infty; 5)$ корней нет; при $a = 5$ $x \in [-2; 3]$; при $a \in (5; +\infty)$

$$x_1 = \frac{1-a}{2}, \quad x_2 = \frac{a+1}{2}.$$

Способ 2 (графический). На координатной плоскости xOa построим график функции

$$a = |x+2| + |x-3| = \begin{cases} -2x+1, & a < -2, \\ 5, & -2 \leq x \leq 3, \\ 2x-1, & x > 3. \end{cases}$$



По рисунку делаем вывод: при $a \in (-\infty; 5)$ уравнение корней не имеет; при $a = 5$ уравнение имеет корни $x \in [-2; 3]$; при $a \in (5; +\infty)$ уравнение имеет корни, которые находим из уравнений $a = -2x+1$, $x_1 = \frac{1-a}{2}$, и $a = 2x-1$, $x_2 = \frac{a+1}{2}$.

Ответ. При $a \in (-\infty; 5)$ корней нет; при $a = 5$ $x \in [-2; 3]$; при $a \in (5; +\infty)$ $x_1 = \frac{1-a}{2}$, $x_2 = \frac{a+1}{2}$.

Пример 25. Решите уравнение $\frac{a|x|+2}{x-2} = 4$.

Решение

ОДЗ: $x \neq 2$.

Раскроем модуль, получим, что заданное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{ax+2}{x-2} = 4, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ \frac{-ax+2}{x-2} = 4. \end{cases} \quad (2)$$

Решим систему (1).

Из уравнения системы имеем:

$$\frac{ax+2}{x-2} = 4,$$

$$ax+2 = 4x-8, \text{ или } (a-4)x = -10.$$

Если $a = 4$, то $0 \cdot x = -10$, $x \in \emptyset$.

Если $a \neq 4$, то $x = \frac{-10}{a-4}$.

Согласно ОДЗ $x \neq 2$, то есть

$$\frac{-10}{a-4} \neq 2,$$

откуда $a \neq -1$. Так как $x \geq 0$, то

$$\frac{-10}{a-4} \geq 0, \text{ или } a-4 < 0, \quad a < 4.$$

Следовательно, при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 4)$

$$x = \frac{10}{a-4}.$$

Решим систему (2). Из уравнения системы имеем:

$$\frac{-ax+2}{x-2} = 4, \quad -ax+2 = 4x-8, \text{ или } (a+4)x = 10.$$

Если $a+4 = 0$, $a = -4$, то $0 \cdot x = 10$, $x \in \emptyset$.

Если $a \neq -4$, то $x = \frac{10}{a+4}$.

Согласно ОДЗ $x \neq 2$, то есть

$$\frac{10}{a+4} \neq 2, \quad 2a+8 \neq 10, \quad a \neq 1.$$

Так как $x < 0$, то есть

$$\frac{10}{a+4} < 0,$$

то $a+4 < 0$, $a < -4$.

Следовательно, при $a \in (-\infty; -4)$ $x = \frac{10}{a+4}$.

Объединяя решения этих двух систем, получим ответ.

Ответ. При $a \in (-\infty; -4)$ $x_1 = \frac{10}{4-a}$, $x_2 = \frac{10}{a+4}$;

при $a \in [-4; -1) \cup (-1; 4)$ $x = \frac{10}{4-a}$; при $a = -1$,

$a \in [4; +\infty)$ корней нет.

ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Начнём с определения.

Линейным неравенством называют неравенство вида $ax \leq b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа (параметры), а знак « $\leq$ » означает один из знаков неравенства: « $>$ », « $<$ », « $\geq$ », « $\leq$ ».

Решением линейного неравенства называют множество таких значений переменной, которые обращают его в верное числовое равенство.

При решении неравенств пользуются правилами:

- ✓ Если слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный, то получится неравенство, равносильное исходному.
- ✓ Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то получится неравенство, равносильное исходному.
- ✓ Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится.
- ✓ Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

Приведём общую схему решения линейного неравенства с параметром.

Пусть линейное неравенство представлено в виде

$$ax \leq b. \quad (*)$$

1. Пусть $a = 0$. Тогда, подставив его в исходное неравенство (*), получим неравенство $0x \leq b$, которое решаем при каждом значении параметра b .
2. Теперь рассмотрим случай, когда $a > 0$. Решим исходное неравенство (*), получим решение $x \leq \frac{b}{a}$.
3. Рассмотрим случай, когда $a < 0$. Решим исходное неравенство (*), получим решение $x \geq \frac{b}{a}$.

Аналогичную схему решения можно привести и для неравенства $ax \geq b$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите неравенство

$$ax > 0.$$

Решение

- 1) Если $a = 0$, то $0x > 0$, решений нет, так как $0x = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Если $a > 0$, то $x > \frac{0}{a}$, $x > 0$.
- 3) Если $a < 0$, то $x < \frac{0}{a}$, $x < 0$.

Ответ. При $a = 0$ решений нет; при $a \in (0; +\infty)$ $x \in (0; +\infty)$; при $a \in (-\infty; 0)$ $x \in (-\infty; 0)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$(a - a^2)x \leq 0.$$

Решение

$$\text{Пусть } a - a^2 = 0.$$

Имеем:

$$a - a^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - a)a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 1. \end{cases}$$

Отсюда при $a = 0$ или $a = 1$ неравенство принимает вид: $0x \leq 0$. Значит, $x \in \mathbb{R}$ при $a = 0$ и $a = 1$.

$$\text{Пусть } a - a^2 < 0.$$

Имеем:

$$a - a^2 < 0 \Leftrightarrow a(a - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a > 1, \end{cases}$$

то есть $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

При этом решением исходного неравенства является $x \geq 0$, $x \in [0; +\infty)$.

$$\text{Пусть } a - a^2 > 0.$$

Имеем:

$$a - a^2 > 0 \Leftrightarrow a(a - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1,$$

то есть $a \in (0; 1)$.

Здесь решением неравенства является

$$x \leq 0, \quad x \in (-\infty; 0].$$

Ответ. При $a = 0$ и $a = 1$ $x \in \mathbb{R}$; при $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ $x \in [0; +\infty)$; при $a \in (0; 1)$ $x \in (-\infty; 0]$.

Пример 3. Решите неравенство

$$(3-a)x \geq a+2.$$

Решение

1) Если $a=3$, то $0x \geq 5$, решений нет.

2) Если $a < 3$, то $x \geq \frac{a+2}{3-a}$.

3) Если $a > 3$, то $x \leq \frac{a+2}{3-a}$.

Ответ. При $a=3$ решений нет; при $a < 3$ $x \geq \frac{a+2}{3-a}$; при $a > 3$ $x \leq \frac{a+2}{3-a}$.

Пример 4. Решите неравенство

$$(a^2 - 3a - 10)x \geq a^2 - 4.$$

Решение

Поскольку

$$a^2 - 3a - 10 = (a-5)(a+2)$$

и

$$a^2 - 4 = (a-2)(a+2),$$

то неравенство можно переписать в виде

$$(a-5)(a+2)x \geq (a-2)(a+2).$$

Пусть $(a-5)(a+2)=0$; отсюда имеем: $a=-2$, $a=5$.

1) Если $a=5$, то $0x \geq 21$, решений нет.

2) Если $a=-2$, то $0x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$;

Пусть

$$(a-5)(a+2) > 0;$$

отсюда имеем: $a \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

Тогда решением будет $x \geq \frac{a-2}{a-5}$.

Пусть

$$(a-5)(a+2) < 0;$$

отсюда $-2 < a < 5$, $a \in (-2; 5)$.

Тогда решением будет $x \leq \frac{a-2}{a-5}$.

Ответ. При $a=5$ решений нет; при $a=-2$ $x \in \mathbb{R}$; при $a \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$ $x \geq \frac{a-2}{a-5}$; при $a \in (-2; 5)$ $x \leq \frac{a-2}{a-5}$.

Пример 5. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $(a-4)x < a+2$ выполняется для всех значений x из отрезка $[-5; 4]$.

Решение

1) При $a=4$ имеем:

$$0x < 6, x \in \mathbb{R}.$$

2) При $a > 4$ $x < \frac{a+2}{a-4}$, поэтому, согласно условию, получаем

$$\frac{a+2}{a-4} > 4, a+2 > 4a-16,$$

$3a < 18$, $a < 6$, то есть $4 < a < 6$, $a \in (4; 6)$ (рис. 1).

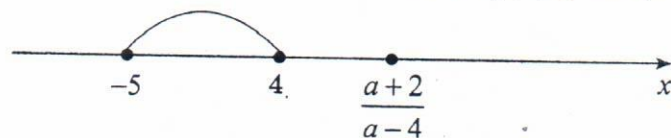


Рис. 1

3) При $a < 4$ $x > \frac{a+2}{a-4}$, поэтому по условию получаем:

$$\frac{a+2}{a-4} < -5, a+2 > -5a+20, 6a > 18,$$

$a > 3$, то есть $3 < a < 4$, $a \in (3; 4)$ (рис. 2).

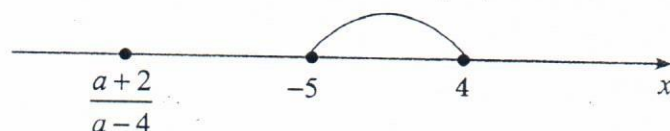


Рис. 2

Объединяя все решения, получим ответ.

Ответ. $a \in (3; 6)$.

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{ax}{a+2} > 3.$$

Решение

При $a+2=0$, $a=-2$ неравенство не имеет смысла.

1) Пусть $\frac{a}{a+2}=0$; отсюда $a=0$. Тогда неравенство принимает вид $0x > 3$, что не может быть, значит, решений нет.

2) Если

$$\frac{a}{a+2} < 0, a(a+2) < 0, -2 < a < 0, a \in (-2; 0),$$

то

$$x < \frac{3}{\frac{a}{a+2}}, x < \frac{3(a+2)}{a}.$$

3) Если

$$\frac{a}{a+2} > 0, a(a+2) > 0, a \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty),$$

то

$$x > \frac{3}{\frac{a}{a+2}}, x > \frac{3(a+2)}{a}.$$

Объединяя все решения, получим ответ.

Ответ. При $a = -2$ решений нет; при $a \in (-2; 0)$ $x \in \left(-\infty; \frac{3a+6}{a}\right)$; при $a \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ $x \in \left(\frac{3a+6}{a}; +\infty\right)$.

Пример 7. Решите неравенство

$$\frac{a-1}{x-2} < 0.$$

Решение

ОДЗ: $x-2 \neq 0$, $x \neq 2$.

1) При $a-1=0$, $a=1$ неравенство сводится к виду

$$\frac{0}{x-2} < 0,$$

которое решений не имеет.

2) При $a-1 > 0$, $a > 1$ имеем:

$$\frac{1}{x-2} < 0, \quad x-2 < 0, \quad x < 2, \quad x \in (-\infty; 2).$$

3) При $a-1 < 0$, $a < 1$ имеем:

$$\frac{1}{x-2} > 0, \quad x-2 > 0, \quad x > 2, \quad x \in (2; +\infty).$$

Объединяя все решения, получим ответ.

Ответ. При $a = 2$ решений нет; при $a \in (1; +\infty)$ $x \in (-\infty; 2)$; при $a \in (-\infty; 1)$ $x \in (2; +\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{a+2}{(a-3)(x+5)} \geq 0.$$

Решение

ОДЗ: $x+5 \neq 0$, $x \neq -5$.

При $a-3=0$, $a=3$ неравенство не имеет смысла.

1) Пусть $\frac{a+2}{a-3} = 0$, тогда $a = -2$ и исходное неравенство принимает вид:

$$0 \cdot \frac{1}{x+5} \geq 0, \quad \text{или } 0 \geq 0.$$

Тогда $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

2) При

$$\frac{a+2}{a-3} > 0, \quad (a+2)(a-3) > 0, \quad a \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$$

исходное неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{x+5} \geq 0, \quad \text{откуда } x > -5, \quad x \in (-5; +\infty).$$

3) При $\frac{a+2}{a-3} < 0$, $a \in (-2; 3)$ исходное неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{x+5} \leq 0, \quad \text{откуда } x < -5, \quad x \in (-\infty; -5).$$

Ответ. При $a = -2$ $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$; при $a \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ $x \in (-5; +\infty)$; при $a \in (-2; 3)$ $x \in (-\infty; -5)$; при $a = 3$ решений нет.

Пример 9. Решите неравенство

$$(a-2)x \leq a+3$$

для всех $x \leq 2$.

Решение

1) Пусть $a-2=0$, $a=2$. Тогда заданное неравенство принимает вид: $0x \leq 3$, откуда $x \in \mathbb{R}$. Учитывая условие $x \leq 2$, получим: $x \in (-\infty; 2]$.

2) Пусть $a-2 > 0$, $a > 2$. Тогда

$$x \leq \frac{a+3}{a-2}.$$

По условию $x \leq 2$. Рассмотрим расположение точек $\frac{a+3}{a-2}$ и 2 на координатной прямой.

Пусть

$$\frac{a+3}{a-2} > 2, \quad \frac{-a+7}{a-2} > 0, \quad \frac{a-7}{a-2} < 0, \quad (a-7)(a-2) < 0,$$

откуда $2 < a < 7$. Условие $a > 2$ соблюдается, значит, при $a \in (2; 7)$

$$x \leq \frac{a+3}{a-2}.$$

Пусть

$$\frac{a+3}{a-2} \leq 2, \quad \frac{a-7}{a-2} \geq 0, \quad a-7 \geq 0 \quad (\text{так как } a-2 > 0),$$

откуда $a \geq 7$. Значит, при $a \geq 7$ $x \leq 2$.

3) Пусть $a-2 < 0$, $a < 2$. Тогда

$$x \geq \frac{a+3}{a-2}.$$

По условию $x \leq 2$. Рассмотрим расположение точек $\frac{a+3}{a-2}$ и 2 на координатной прямой.

Пусть $\frac{a+3}{a-2} \geq 2$, $\frac{-a+7}{a-2} \geq 0$, $\frac{a-7}{a-2} \leq 0$, $a-7 \geq 0$ (так как $a-2 < 0$), откуда $a \geq 7$. По допущению $a < 2$, то есть решений нет.

Пусть

$$\frac{a+3}{a-2} < 2, \quad \frac{a-7}{a-2} > 0, \quad a-7 < 0 \quad (\text{так как } a-2 < 0),$$

откуда $a < 7$. По допущению $a < 2$, поэтому при $a < 2$ $x \in \left[\frac{a+3}{a-2}; 2\right]$.

Объединяя все решения, получим ответ.

Ответ. При $a = 2$ $x \in (-\infty; 2]$; при $a \in (2; 7)$ $x \leq \frac{a+3}{a-2}$; при $a \in [7; +\infty)$ $x \in (-\infty; 2]$; при $a \in (-\infty; 2)$ $x \in \left[\frac{a+3}{a-2}; 2\right]$.

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Систему линейных уравнений с двумя неизвестными x и y можно записать в виде:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (*)$$

Из курса геометрии известно, что взаимное расположение двух прямых на плоскости может быть следующим:

- 1) прямые пересекаются (то есть имеют одну общую точку);
- 2) прямые параллельны (то есть не имеют ни одной общей точки);
- 3) прямые совпадают (то есть у них все точки общие).

В первом случае система линейных уравнений имеет единственное решение, во втором — не имеет решений, в третьем — имеет бесконечно много решений. Эти выводы для системы (*) линейных уравнений, записанной в общем виде, можно алгебраически сформулировать следующим образом:

а) если соответствующие коэффициенты уравнений пропорциональны, то есть

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

то система имеет бесконечное множество решений;

б) если

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2},$$

то система не имеет решений;

в) если

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

то система имеет единственное решение.

Основными методами решения системы линейных уравнений являются метод подстановки и метод сложения.

Пример 10 ([1], в. 3, 14). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Решение

Система имеет бесконечно много решений, если выполняются соотношения

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{1}{a},$$

откуда $a = -2$.

Ответ. $a = -2$.

Пример 11 ([1], в. 4, 14). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение

Система не имеет решений, если выполняются соотношения:

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} \neq \frac{a^2}{1}.$$

Имеем:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{a}, \\ a \neq a^2, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 1, \\ a \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1, \\ a = 1, \\ a \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1, \\ a \neq 1, \\ a = 1, \\ a \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1, \\ a \in \emptyset, \end{cases}$$

откуда $a = -1$.

Ответ. $a = -1$.

Пример 12 ([1], в. 5, 14). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение

Система имеет единственное решение, если выполняются соотношения:

$$\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}.$$

Имеем: $a^2 \neq 1$, откуда $a \neq -1$, $a \neq 1$.

Ответ. $a \neq \pm 1$.

Пример 13. Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} (a-4)x + 2y = 4, \\ (a-4)^2x + 4ay = 16. \end{cases} \quad (1)$$

Решение

При решении данной системы применим метод подстановки. Следует учитывать, что коэффициенты при неизвестных могут обращаться в нуль. Поэтому если из какого-либо уравнения системы будем находить выражение одного из неизвестных (например, x) через другое, то будем отдельно рассматривать случай обращения в нуль коэффициента при этом неизвестном.

Пусть $a-4=0$, тогда имеем:

$$\begin{cases} 0x+2y=4, \\ 0x+4\cdot 4y=16, \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ y=1, \end{cases}$$

откуда решений нет. Значит, при $a-4=0$, $a=4$ система (1) решений не имеет.

Пусть $a \neq 4$. Тогда из первого уравнения системы (1) имеем:

$$x = \frac{4-2y}{a-4}. \quad (2)$$

Подставляя (2) вместо x во второе уравнение системы (1), получим систему уравнений, равносильную данной:

$$\begin{cases} x = \frac{4-2y}{a-4}, \\ (a-4)(4-2y)+4ay=16, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \frac{4-2y}{a-4}, \\ (a+4)y=16-2a. \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку $a+4$ равно нулю при $a=-4$, $16-2a$ равно нулю при $a=8$, то при $a=-4$ второе уравнение системы (3) решений не имеет. Следовательно, исходная система также не имеет решений.

При $a \neq \pm 4$ имеем:

$$y = \frac{16-2a}{a+4},$$

а, следовательно,

$$\begin{aligned} x &= \frac{4-2 \cdot \frac{16-2a}{a+4}}{a-4} = \frac{4a+16-32+4a}{(a-4)(a+4)} = \\ &= \frac{8(a-2)}{(a-4)(a+4)}. \end{aligned}$$

Ответ. При $a = \pm 4$ решений нет; при $a \in (-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$ $x = \frac{8a-16}{a^2-16}$, $y = \frac{16-2a}{a+4}$.

Пример 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} ax+y=2, \\ 3x+y=3. \end{cases}$$

Решение

Вычтем из второго уравнения системы первое, получим:

$$(3-a)x=1.$$

Теперь нам предстоит разделить обе части полученного уравнения на $3-a$. Но выражение $3-a$ при $a=3$ равно нулю; при всех других значениях a оно отлично от нуля. Итак, возможны два случая.

Случай 1. $a \neq 3$. Тогда

$$x = \frac{1}{3-a}$$

и из второго уравнения системы имеем:

$$3 \cdot \frac{1}{3-a} + y = 3, \quad y = \frac{3(2-a)}{3-a}.$$

Случай 2. $a = 3$. Тогда исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} 3x+y=2, \\ 3x+y=3. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

Ответ. При $a=3$ решений нет; при $a \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ $x = \frac{1}{3-a}$, $y = \frac{6-3a}{3-a}$.

Пример 15. Решите систему

$$\begin{cases} ax+a^2y=2, \\ x+(a-2)y=a. \end{cases} \quad (1)$$

Решение

Пусть $a=0$, тогда заданная система принимает вид:

$$\begin{cases} 0x+0y=2, \\ x+y=0. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) решений не имеет.

Пусть $a \neq 0$. Умножим обе части второго уравнения системы (1) на $-a$, получим систему

$$\begin{cases} ax+a^2y=2, \\ -ax-a(a-2)y=-a^2. \end{cases} \quad (3)$$

Сложим почленно уравнения системы (3) и заменим найденной суммой второе уравнение системы (1). Получим систему, равносильную системе (1):

$$\begin{cases} ax+a^2y=2, \\ 2ay=2-a^2. \end{cases} \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (4) имеем:

$$y = \frac{2-a^2}{2a}. \quad (5)$$

Из первого уравнения системы (4) имеем:

$$x = \frac{2-a^2y}{a}. \quad (6)$$

Подставим (5) в (6), получим:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2-a^2 \cdot \frac{2-a^2}{2a}}{a} = \frac{2-\frac{2a+a^3}{2}}{a} = \\ &= \frac{4-2a-a^3}{2a}. \end{aligned}$$

Ответ. При $a=0$ решений нет; при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $x = \frac{4-2a-a^3}{2a}$, $y = \frac{2-a^2}{2a}$.

Пример 16 ([1], в. 7, 14). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $x > y$.

Решение

Сложим почленно уравнения системы, получим:

$$3x = a+3,$$

откуда

$$x = \frac{a+3}{3}.$$

Подставим это значение в первое уравнение системы. Имеем:

$$\frac{a+3}{3} + y = a,$$

откуда

$$y = \frac{2a-3}{3}.$$

Теперь решим неравенство $x > y$, то есть

$$\frac{a+3}{3} > \frac{2a-3}{3},$$

$$a+3 > 2a-3, \quad a < 6.$$

Ответ. При $a \in (-\infty; 6)$.

Литература

1. ЕГЭ 2016. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 / И. В. Яценко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий и др.; под ред. И. В. Яценко. — М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2016. — 215, [1] с. (Серия «ЕГЭ. 30 вариантов. Типовые тестовые задания»).
2. Сефибеков С. Р. Психолого-педагогические условия развития математического образования школьников в инновационной школьной среде: монография. — Н. Новгород: НИУ РАНХ и ГС, 2014. — 172 с.
3. Сефибеков С. Р. Организация элективного курса по математике в средней школе: методические рекомендации для педагогов. — Н. Новгород: НИУ РАНХ и ГС, 2014. — 35 с.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

В курсе алгебры 8 класса рассматривается единственный пример квадратного уравнения с параметром ([1], пример 2, с. 142). В связи с этим, полезно ознакомить учащихся 9–11-х классов с данной темой на кружковых и элективных занятиях. Это будет для них хорошей подготовкой для сдачи ЕГЭ.

Приведём известные теоретические сведения о квадратном уравнении:

1. Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (*)$$

где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называется квадратным.

2. Формула корней уравнения (*) имеет вид:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного уравнения или квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

3. Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни $x = x_1$ и $x = x_2$, то он разлагается на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

4. Число корней уравнения (*):

- 1) если $D < 0$, то уравнение не имеет корней;
- 2) если $D > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

если коэффициент b — чётное число ($b = 2k$), то более удобной является формула:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

где

$$D_1 = k^2 - ac; \quad D_1 = \frac{D}{4};$$

3) если $D = 0$, то уравнение имеет два равных корня $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, тогда

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2. \quad (**)$$

В этом случае говорят, что уравнение (*) имеет одно решение и корень $x_1 = -\frac{b}{2a}$ в разложении (**) называется двукратным корнем.

5. Для уравнения (*), имеющего корни x_1 и x_2 , имеют место следующие соотношения (формулы Виета):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

6. Уравнение $x^2 + px + q = 0$, в котором первый коэффициент равен единице ($a = 1$), называется приведённым.

В дальнейшем в уравнении (*) числа a, b и c будем называть параметрами.

Рассмотрим теперь уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с параметрами a, b, c . Одной из распространённых ошибок при решении такого типа уравнений является то, что учащиеся считают их квадратными, забывая при этом, что если коэффициент a при переменной x может оказаться равным нулю, то уравнение превращается в линейное и может иметь одно решение.

Пример 1. При каких значениях a уравнение $(a-4)x^2 + 16x - 2 = 0$ имеет единственное решение?

Решение

Если $a-4=0$, $a=4$, то имеем линейное уравнение: $16x-2=0$, откуда $x=\frac{1}{8}$.

Если $a \neq 4$, то данное уравнение — квадратное. Требование задачи — условие:

$$D_1 = 0 \Leftrightarrow 64 + 2(a-4) = 0 \Leftrightarrow a = -28.$$

Ответ. При $a = -28$ и $a = 4$.

Пример 2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет ровно два различных корня. ([2], 14.9)

Решение

Должно выполняться условие:

$$D_1 > 0 \Leftrightarrow a^2 - (2a-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 1.$$

Ответ. $a \neq 1$.

Пример 3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ имеет корни. ([2], 14.11)

Решение

Если $a-2=0$, $a=2$, то $2=0$ (ложно). Значит, уравнение корней не имеет.

Если $a \neq 2$, то должно выполняться условие:

$$D_1 < 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 - 2(a-2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-2)(a-4) < 0 \Leftrightarrow 2 < a < 4.$$

Объединяя полученные решения, получим ит.

Ответ. $2 < a < 4$.

Пример 4. Найдите все значения a , при каждом из которых один корень уравнения $+(2a-1)x + a^2 + 2 = 0$ вдвое больше другого. [1], 14.15)

Решение

По формулам Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2a-1); \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Допустим, что $x_1 = 2x_2$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_2 = -(2a-1), \\ 2x_2 \cdot x_2 = a^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 = 1-2a, \\ 2x_2^2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $x_2 = \frac{1-2a}{3}$ и подставляем во второе уравнение:

$$2 \cdot \left(\frac{1-2a}{3} \right)^2 = a^2 + 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1-4a+4a^2}{9} = a^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = a^2 + 8a + 16 \Leftrightarrow (a+4)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -4.$$

Ответ. $a = -4$.

Пример 5. Найдите все целые значения a , при каждом из которых уравнение

$$(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$$

не имеет корней. ([2], 14.12)

Решение

1. Если $a-2=0$, $a=2$, то $2=0$ (ложно). Значит, при $a=2$ уравнение корней не имеет.

2. Если $a \neq 2$, то должно выполняться условие:

$$D_1 < 0, (a-2)^2 - 2(a-2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-2)(a-4) < 0 \Leftrightarrow 2 < a < 4.$$

Интервалу $(2; 4)$ принадлежит только целое число $a=3$. Значит, при $a=3$ уравнение корней не имеет.

Ответ. $a=2, a=3$.

Пример 6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $ax^2 + 2(a+1)x + (a+3) = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1. ([2], 14.13)

Решение

1. Пусть $a=0$, тогда уравнение принимает вид $2x+3=0$, откуда $x=-1,5$, то есть уравнение имеет один корень. Значит, $a \neq 0$.

2. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет два корня при условии $D_1 > 0$:

$$(a+1)^2 - a(a+3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + 2a + 1 - a^2 - 3a > 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - a > 0 \Leftrightarrow a < 1.$$

Учитывая условие $D_1 = 1 - a$ и $a < 1$, найдём

$$\text{корни: } x_1 = \frac{-a-1-\sqrt{D_1}}{a} \text{ и } x_2 = \frac{-a-1+\sqrt{D_1}}{a}.$$

Запишем требования задачи:

$$\begin{cases} |x_2 - x_1| > 1, \\ a < 1, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left| \frac{-a-1+\sqrt{D_1}}{a} - \frac{-a-1-\sqrt{D_1}}{a} \right| > 1, \\ a < 1, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left| \frac{2\sqrt{D_1}}{a} \right| > 1, \\ a < 1, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{D_1}}{a} < -1, \\ \frac{2\sqrt{D_1}}{a} > 1, \\ a < 1, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{D_1}}{a} < -1, \\ a < 1, \\ a \neq 0; \\ \frac{2\sqrt{D_1}}{a} > 1, \\ a < 1, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Решим систему (1) совокупности.
Если $a < 0$, то

$$\frac{2\sqrt{D_1}}{a} < -1,$$

$$2\sqrt{D_1} > -a, \quad 4D_1 > a^2$$

$$(\text{т. к. } -a > 0) \quad 4(1-a) > a^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + 4a - 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$-2-2\sqrt{2} < a < -2+2\sqrt{2},$$

откуда

$$-2-2\sqrt{2} < a < 0.$$

Если $0 < a < 1$, то $\frac{2\sqrt{D_1}}{a} < -1$ — противоречие,

т. к. $\frac{2\sqrt{D_1}}{a} > 0$ и $-1 < 0$.

Решим систему (2) совокупности.

Если $a < 0$, то $\frac{2\sqrt{D_1}}{a} > 1$ — противоречие,

т. к. $\frac{2\sqrt{D_1}}{a} < 0$ и $1 > 0$.

Если $0 < a < 1$, то

$$\frac{2\sqrt{D_1}}{a} > 1, \quad 2\sqrt{D_1} > a,$$

$$4D_1 > a^2, \quad 4(1-a) > a^2,$$

$$a^2 + 4a - 4 < 0,$$

$$-2-2\sqrt{2} < a < -2+2\sqrt{2},$$

откуда

$$0 < a < -2+2\sqrt{2} \quad (\text{т. к. } -2+2\sqrt{2} < 1).$$

Объединяя полученные решения, получим ответ.

$$\text{Ответ. } -2-2\sqrt{2} < a < 0, \quad 0 < a < -2+2\sqrt{2}.$$

(2)

Пример 7. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет два корня, сумма которых равна нулю. ([2], 14.14)

Решение

Чтобы уравнение имело два корня, должно быть выполнено условие:

$$D_1 = a^2 - 2a + 1 > 0 = (a-1)^2 > 0, \text{ т. е. } a \neq 1.$$

Корни уравнения:

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{(a-1)^2} = a \pm (a-1),$$

$$x_1 = a + a - 1 = 2a - 1, \quad x_2 = a - a + 1 = 1.$$

По условию $x_1 + x_2 = 1 + 2a - 1 = 2a = 0$, откуда $a = 0$ и $0 > 1$ — ложно!

При $a = 0$ данное уравнение сводится к виду: $x^2 - 1 = 0$, $x^2 = 1$, откуда

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1 \end{cases} \text{ и } x_1 + x_2 = -1 + 1 = 0.$$

Ответ. $a = 0$.

Пример 8. При каких значениях a уравнение $-2(a-3)x + a^2 - 7a + 6 = 0$:

- 1) не имеет корней;
- 2) имеет корни;
- 3) имеет один корень;
- 4) имеет два корня;
- 5) имеет положительные корни;
- 6) имеет отрицательные корни;
- 7) имеет корни разного знака, то есть один положительный, а другой — отрицательный;
- 8) имеет один из корней, равный нулю?

Решение

- 1) Должно быть выполнено условие:

$$D_1 < 0,$$

$$D_1 = (a-3)^2 - a^2 + 7a - 6 = a + 3 < 0,$$

$$a < -3.$$

- 2) Должно быть выполнено условие:

$$D_1 \geq 0, \quad a + 3 \geq 0,$$

$$a \geq -3.$$

- 3) Принято считать совпадающие корни как одно решение, тогда условие их существования $D_1 = 0$ или $a = -3$.

- 4) Должно выполняться условие: $D_1 > 0$, то есть $a > -3$;

- 5) Должно выполняться условие:

$$\begin{cases} D_1 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = 2(a-3) > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 7a + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \geq -3, \\ a > 3, \\ a < 1, \\ a > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3, \\ a < 1, \\ a > 3, \\ a > 6 \end{cases} \Rightarrow a > 6.$$

Если в условии будет сказано «имеет два положительных корня», то в системе следует заменить $D_1 \geq 0$ на $D_1 > 0$.

- 6) Должно выполняться условие:

$$\begin{cases} D_1 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = 2(a-3) < 0, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 7a + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \geq -3, \\ a < 3, \\ a < 1, \\ a > 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \geq -3, \\ a < 3, \\ a < 1, \\ a \geq -3, \\ a < 3, \\ a > 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3 \leq a < 1.$$

- 7) Должно выполняться условие:

$$\begin{cases} D_1 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 7a + 6 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a > -3, \\ 1 < a < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a < 6 \Rightarrow 1 < a < 6.$$

- 8) Должно выполняться условие — равенство нулю свободного члена уравнения, то есть

$$a^2 - 7a + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ a = 6. \end{cases}$$

Пример 9. При каком a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (a+3)x + a - 2 = 0$ принимает наименьшее значение?

Решение

Так как дискриминант

$$D = (a+3)^2 - 4(a-2) = a^2 + 2a + 17 = (a+1)^2 + 16 > 0$$

при всех $a \in \mathbb{R}$, то уравнение имеет корни.

Пусть корни уравнения x_1 и x_2 . Имеем:

$$x_1 + x_2 = a + 3,$$

$$x_1 \cdot x_2 = a - 2,$$

Далее, используя теорему Виета, получим

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (a+3)^2 - 2(a-2),$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 + 4a + 13 = (a+2)^2 + 9.$$

Очевидно, что $x_1^2 + x_2^2$ принимает наименьшее значение, когда $(a+2)^2 = 0$, т. е. при $a = -2$.

Ответ. При $a = -2$.

Пример 10. При каких значениях a уравнение

$$(a^2 - 4a + 3)x^2 + (a^2 - 9)x + (a^2 - 8a + 15) = 0$$

имеет более двух корней?

Решение

Если $a^2 - 4a + 3 \neq 0$, то данное уравнение квадратное и имеет не более двух корней.

Если

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \text{ (при } a = 1 \text{ и } a = 3),$$

то уравнение $(a^2 - 9)x + (a^2 - 8a + 15) = 0$ — линейное.

Оно будет иметь бесконечное множество корней, если:

$$\begin{cases} a^2 - 9 = 0, \\ a^2 - 8a + 15 = 0, \\ a^2 - 4a + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -3, \\ a = 3, \\ a = 3, \\ a = 5, \\ a = 1, \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 3.$$

Ответ. При $a = 3$.

Пример 11. Решите уравнение

$$ax^2 + (a+2014)x + 2014 = 0.$$

Решение

1) Если $a = 0$, то уравнение сводится к линейному: $2014x + 2014 = 0$, откуда $x = -1$.

2) Если $a \neq 0$, то уравнение — квадратное. Решение этого уравнения непосредственно по формуле корней квадратного приводит к вычислительным трудностям.

Если же заметить, что

$$a - (a+2014) + 2014 = 0,$$

откуда следует, что $x_1 = -1$ является корнем уравнения, тогда по теореме Виета

$$x_2 = \frac{2014}{ax_1} = -\frac{2014}{a}.$$

Ответ. При $a = 0$, $x = -1$; при $a \neq 0$, $x_1 = -1$,

$$x_2 = -\frac{2014}{a}.$$

Пример 12. Решите уравнение

$$\frac{x^2 + ax + a^2}{x^2 - ax + a^2} = \frac{a^2}{x^2}.$$

Решение

ОДЗ: $x^2 - ax + a^2 \neq 0$, $x \neq 0$.

1) Если $a = 0$, то уравнение примет вид:

$$\frac{x^2}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$

или, учитывая ОДЗ, $1 = 0$ (ложно). Значит, при $a = 0$ уравнение решений не имеет.

2) Пусть $a \neq 0$, тогда дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - ax + a^2$,

$$D = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$$

при любом $a \neq 0$.

Так как

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{m+n}{m-n} = \frac{p+q}{p-q},$$

то уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{2(x^2 + a^2)}{2ax} = \frac{x^2 + a^2}{a^2 - x^2}$$

или

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

Откуда

$$x_{1,2} = \frac{-a(1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Ответ. При $a=0$ корней нет; при $a \neq 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-a(1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Пример 13. Найдите все значения a , при каждом из которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$ принимает наименьшее значение. ([2], 14.17)

Решение

Квадратный трёхчлен имеет корни, если дискриминант

$$D_1 = a^2 - (2a^2 - 6a + 8) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-a^2 + 6a - 8 \geq 0,$$

$$a^2 - 6a + 8 \leq 0, \quad 2 \leq a \leq 4. \quad (*)$$

Пусть x_1 и x_2 — корни заданного квадратного трёхчлена.

Имеем:

$$x_1 + x_2 = 2a,$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2a^2 - 6a + 8.$$

Далее,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4a^2 - 4a^2 + 12a - 16,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 12a - 16.$$

Функция $q(a) = 12a - 16$ — линейная и возрастающая, т. к. $k = 12 > 0$.

Тогда функция принимает наименьшее значение в точке $a = 2$ (см. (*)).

Ответ. $a = 2$.

СВОЙСТВА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА

Для решения квадратных уравнений с параметрами важно очень хорошо знать свойства корней квадратного трёхчлена и использовать их, а также уметь мыслить геометрически, то есть давать геометрическую интерпретацию на графике.

Напомним, что квадратным трёхчленом называется выражение: $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Графиком квадратного трёхчлена является парабола.

$$D = b^2 - 4ac$$

называется дискриминантом квадратного трёхчлена.

Теорема 1. Если $D < 0$, то $f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ имеет тот же знак, что и его старший коэффициент a .

Доказательство

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) =$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) =$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right), \text{ т. е.}$$

$$f(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right). \quad (1)$$

Так как $D < 0$, то $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

В силу этого $f(x)$ имеет то же знак, что и коэффициент a .

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл.

Если $D < 0$, то график $f(x)$ (парабола) целиком расположен в верхней полуплоскости (т. е. в полуплоскости, в которой ординаты положительны), когда $a > 0$, и в нижней полуплоскости (т. е. в полуплоскости, в которой ординаты отрицательны), когда $a < 0$ (рис. 1 и 2).

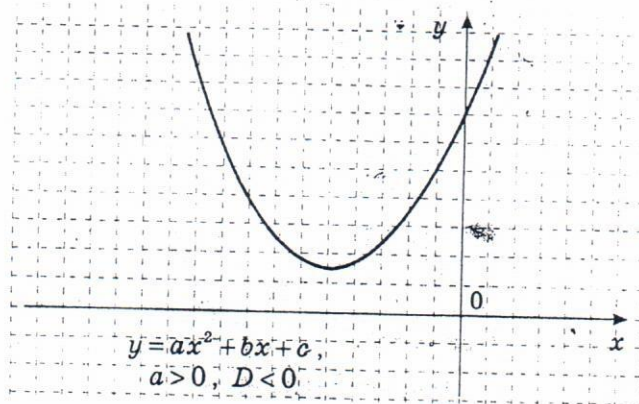


Рис. 1

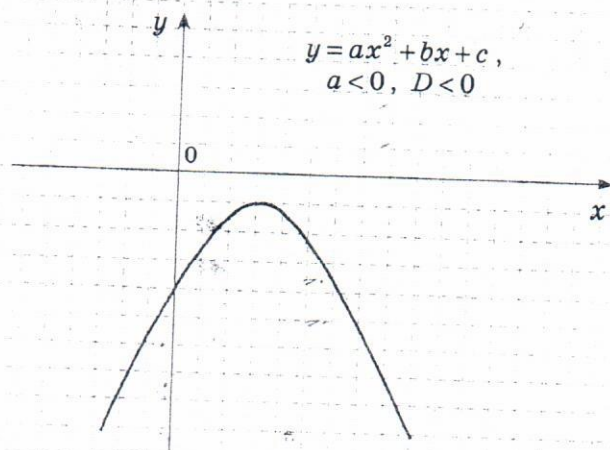


Рис. 2

Теорема 2. Если $D=0$, то $f(x)=0$ при $x=-\frac{b}{2a}$, а при всех $x \neq -\frac{b}{2a}$ $f(x)$ имеет тот же знак, что a — его старший коэффициент.

Доказательство

При $D=0$ равенство (1) примет вид:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Выражение

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

равно нулю при $x = -\frac{b}{2a}$, а при $x \neq -\frac{b}{2a}$ $f(x)$ имеет тот же знак, что и a .

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл.

Если $D=0$, то график $f(x)$ (парабола) касается оси Ox в точке $x = -\frac{b}{2a}$ и расположен в верхней полуплоскости, когда $a > 0$, и в нижней полуплоскости, когда $a < 0$ (рис. 3 и 4).

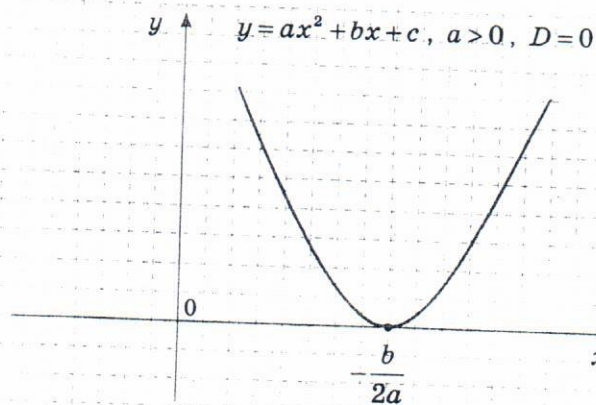


Рис. 3

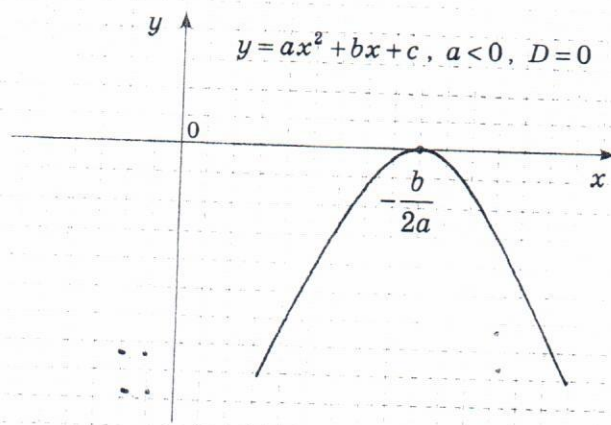


Рис. 4

Теорема 3. Если $D > 0$, то $f(x)=0$ в двух различных точках $x=x_1$ и $x=x_2$. Во всех точках, лежащих вне промежутка (x_1, x_2) , $f(x)$ имеет знак своего старшего коэффициента a , а во всех точках внутри этого промежутка имеет знак, противоположный знаку старшего коэффициента a .

Доказательство

Разложим квадратный трёхчлен $f(x)$ на множители:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) \quad (2)$$

(по условию $x=x_1$, $x=x_2$ — корни трёхчлена $f(x)$).

$$f(x)=0 \text{ при } x=x_1 \text{ и } x=x_2, x_1 \neq x_2.$$

Пусть $x_1 < x_2$. Выясним сначала знак трёхчлена $f(x)$ вне промежутка (x_1, x_2) , т. е. при $x < x_1$ или $x > x_2$.

Если $x < x_1$, то $x < x_2$ и произведение $(x-x_1)(x-x_2)$ положительно.

Значит, правая часть равенства (2) имеет тот же знак, что и коэффициент a .

Если $x > x_2$, то $x > x_1$ и произведение $(x-x_1)(x-x_2)$ опять положительно и правая часть равенства (2) опять имеет тот же знак, что и коэффициент a .

Осталось проверить, какой знак имеет трёхчлен $f(x)$ при x , лежащем внутри промежутка между корнями x_1 и x_2 .

Пусть $x_1 < x < x_2$. Тогда $x-x_1 > 0$, а $x-x_2 < 0$, произведение $(x-x_1)(x-x_2)$ отрицательно, а правая часть равенства (2) имеет знак, противоположный знаку коэффициента a .

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл.

Если дискриминант квадратного трёхчлена положителен, его график пересекает ось Ox в двух точках. Если при этом старший коэффициент трёхчлена положителен, график трёхчлена (парабола), за исключением дуги, отсекаемой осью Ox , лежит в верхней полуплоскости. Если же старший коэффициент трёхчлена отрицателен, график его, за исключением дуги, отсекаемой осью Ox , лежит в нижней полуплоскости (рис. 5 и 6).

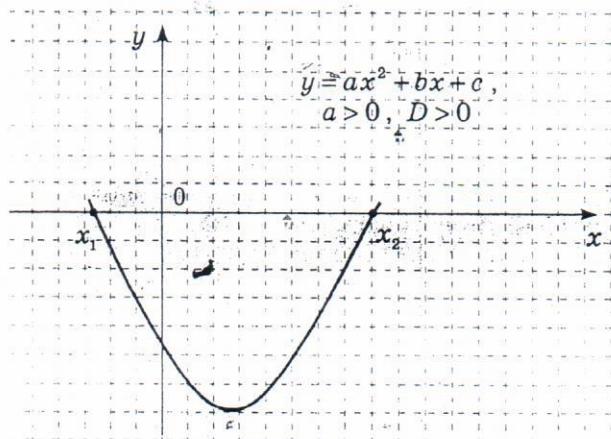


Рис. 5

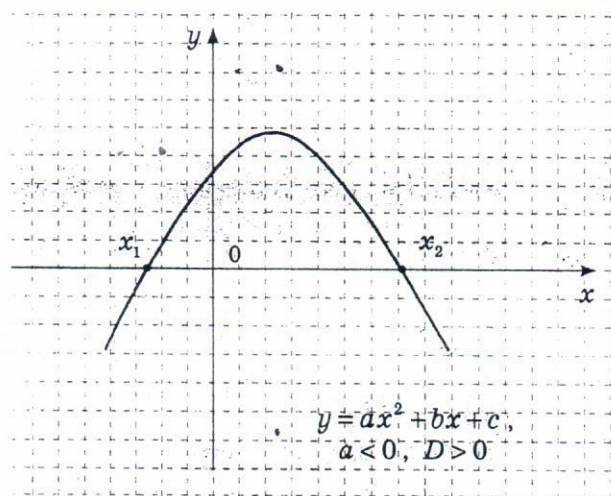


Рис. 6

Знаки корней квадратного трёхчлена исследуются с помощью теоремы Виета. Для этого используются следующие теоремы.

Теорема 4. Для того чтобы корни x_1 и x_2 квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$$D = b^2 - 4ac \geq 0;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0.$$

Доказательство

Чтобы существовали два корня (возможность их совпадения не исключается: при $D=0$, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, (см. рис. 3 и 4), необходимо и достаточно выполнение условия: $D \geq 0$.

Корни x_1 и x_2 имеют одинаковые знаки тогда и только тогда, когда $x_1 \cdot x_2 > 0$ или по теореме Виета $c \cdot a > 0$.

Оба корня будут положительными, если дополнительно наложить условие

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0;$$

оба корня будут отрицательными, если

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0.$$

Теорема 5. Для того чтобы корни x_1 и x_2 квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ имели разные знаки, необходимо и достаточно выполнение соотношений:

$$1) D = b^2 - 4ac > 0;$$

$$2) x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0.$$

При этом положительный корень будет иметь больший модуль, если

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0.$$

Если же

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0,$$

то отрицательный корень будет иметь больший модуль.

Доказательство такое же, как и в теореме 4. Заметим, что условие $D = b^2 - 4ac > 0$ является следствием неравенства $\frac{c}{a} < 0$.

Дадим второе доказательство. Если

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

то условие теоремы равносильно совокупности двух систем (см. рис. 5 и 6);

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(0) < 0, \\ a < 0, \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a > 0, \\ c < 0, \\ a < 0, \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$ac < 0 \Leftrightarrow -4ac > 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0.$$

При втором доказательстве теоремы 5 мы воспользовались следующим свойством непрерывных функций: непрерывная и не обращающаяся в нуль на интервале $(a; b)$ функция сохраняет на нём постоянный знак. Непосредственным следствием этого утверждения является следующая теорема.

Теорема 6 (Больцано–Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдётся точка c , в которой функция обращается в нуль:

$$f(c) = 0 \quad (a < c < b).$$

(Доказательство этой теоремы приводится в полных курсах математического анализа).

Теорема 6 имеет простой геометрический смысл: если непрерывная кривая переходит с одной полуплоскости относительно оси Ox на другую, то она пересекает эту ось (рис. 7).

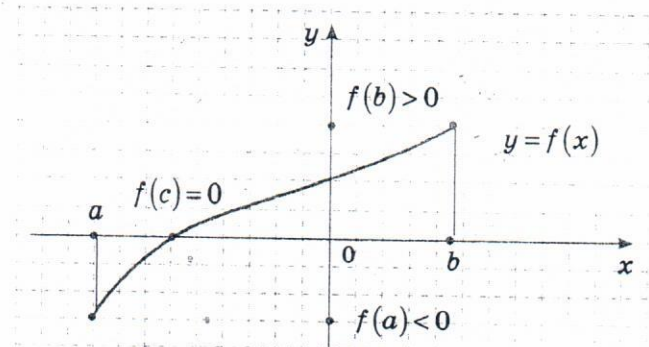


Рис. 7

Предлагаем читателям обосновать этот способ доказательства с использованием теоремы 6.

Пример 14. Выясните знаки параметров a , b и c , если график функции

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

имеет вид, изображённый:

- 1) на рис. 5;
- 2) на рис. 6.

Решение

- 1) Так как ветви направлены вверх, то $a > 0$. Так как парабола пересекает ось Oy в точке $(0; c)$, то $c < 0$.

Так как вершина параболы расположена в правой полуплоскости, то $x_0 > 0$, где x_0 — абсцисса вершины.

Значит,

$$x_0 = -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Leftrightarrow b < 0 \quad (\text{т. к. } a > 0).$$

Ответ. $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$.

- 2) Так как ветви направлены вниз, то $a < 0$.

Так как парабола пересекает ось Oy в точке $(0; c)$, то $c > 0$.

Так как вершина параболы расположена в правой полуплоскости $x_0 > 0$,

$$x_0 = -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Leftrightarrow b > 0 \quad (\text{т. к. } a < 0).$$

Ответ. $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Пример 15. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a-1)x^2 - 2ax + a+3 = 0$ положительны?

Решение

Способ 1

- 1) При $a = 1$ уравнение принимает вид:

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 > 0.$$

- 2) При $a \neq 1$, так как уравнение имеет корни, $D \geq 0$.

По теореме 4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} D_1 \geq 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - (a-1)(a+3) \geq 0, \\ \frac{2a}{a-1} > 0, \\ \frac{a+3}{a-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2a + 3 \geq 0, \\ a(a-1) > 0, \\ (a+3)(a-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a \leq \frac{3}{2}, \\ a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \Rightarrow \\ a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -3) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right].$$

Ответ. При $a=1$; $a < -3$; $1 < a \leq \frac{3}{2}$.

Способ 2

1) $a=1$ — одно из искоемых значений.

2) Разделим обе части уравнения на $a-1 \neq 0$ при $a \neq 1$:

$$x^2 - \frac{2a}{a-1}x + \frac{a+3}{a-1} = 0.$$

Рассмотрим квадратный трёхчлен:

$$f(x) = x^2 - \frac{2a}{a-1}x + \frac{a+3}{a-1}. \quad (*)$$

Графиком этого квадратного трёхчлена является парабола, ветви которой направлены вверх. Так как $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то график находится в правой полуплоскости (рис. 8).

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(0) > 0, \\ x_0 = -\frac{b}{2a} > 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2a+3 \geq 0, \\ \frac{a+3}{a-1} > 0, \\ \frac{2a}{a-1} > 0. \end{cases}$$

Далее — способ 1 решения.

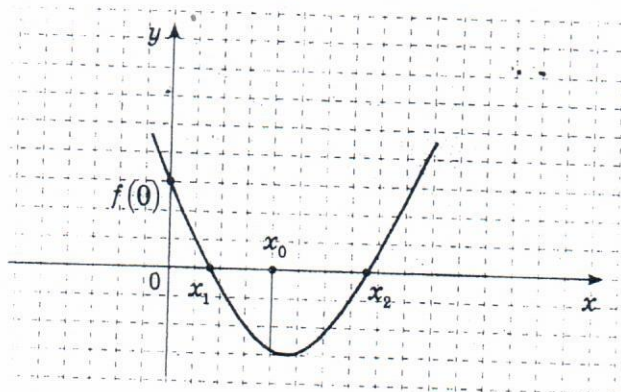


Рис. 8

Способ 3

При $x \in (-\infty; x_0]$ (где $x_0 = -\frac{b}{2a}$) функция $f(x)$ (см. (*)) убывающая (рис. 8). Тогда при $x \in (-\infty; x_0)$ $f'(x) < 0$ и $f'(0) = -\frac{2a}{a-1} < 0$. Отсюда имеем:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(0) > 0, \\ -\frac{2a}{a-1} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+3 \geq 0, \\ \frac{a+3}{a-1} > 0, \\ \frac{2a}{a-1} > 0. \end{cases}$$

Далее — способ 1 решения.

Пример 16. При каких значениях a корни уравнения

$$(a-2)x^2 + x + (a-3)(a^2+1) = 0$$

имеют противоположные знаки?

Решение

По условию уравнение должно иметь два корня: $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$. Поэтому $a-2 \neq 0$, $a \neq 2$. Отсюда

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(a-3)(a^2+1)}{a-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a-3}{a-2} < 0$$

$$(\text{т. к. } a^2+1 > 0 \Leftrightarrow (a-3)(a-2) < 0), a \in (2; 3).$$

Теперь проверим будет ли дискриминант уравнения положительным при $a \in (2; 3)$ (иначе уравнение корней не имеет):

$$D = 1 - 4(a-2)(a-3)(a^2+1) > 0,$$

так как

$$a-2 > 0, a^2+1 > 0 \text{ и } a-3 < 0.$$

Ответ. При $a \in (2; 3)$.

Пример 17. Найдите значения a , при которых оба корня уравнения $(a-2)x^2 - ax + 2 = 0$ положительны.

Решение

По условию уравнение должно иметь два корня $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, т.е. должно быть квадратным. Тогда $a-2 \neq 0$, $a \neq 2$.

Имеем систему:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \Rightarrow \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 8(a-2) \geq 0, \\ \frac{a}{a-2} > 0, \Leftrightarrow \\ \frac{2}{a-2} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4)^2 \geq 0, \\ a(a-2) > 0, \Leftrightarrow \\ a-2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ a > 0, \Rightarrow a \in (2; +\infty). \\ a > 2 \end{cases}$$

Ответ. $a \in (2; +\infty)$.

Пример 18. Найдите значения a , при которых оба корня уравнения $x^2 - (a+2)x + 2a - 3 = 0$ отрицательны.

Решение

Пусть $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$ — корни уравнения. По условию:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \Rightarrow \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+2)^2 - 4(2a-3) \geq 0, \\ a+2 < 0, \Leftrightarrow \\ 2a-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2)^2 + 12 > 0, \\ a < -2, \\ a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Система неравенств решений не имеет.

Ответ. Таких значений a не существует.

Мы рассмотрели примеры, когда корни квадратного трёхчлена располагались на числовой оси относительно нуля (по одну сторону и по разные стороны). Если в примере расположе-

ние корней ограничивается числом, не равным нулю, то применять формулы теоремы Виета нельзя. Тогда используются теоремы о расположении корней.

Пусть квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2 , а x_0 — какое-нибудь число ($x_0 \neq 0$).

Рассмотрим следующие теоремы.

Теорема 7. Чтобы оба корня квадратного трёхчлена были меньше, чем число x_0 (то есть лежали на координатной прямой левее, чем точка x_0), необходимо и достаточно выполнение условий:

1) Рис. 9.

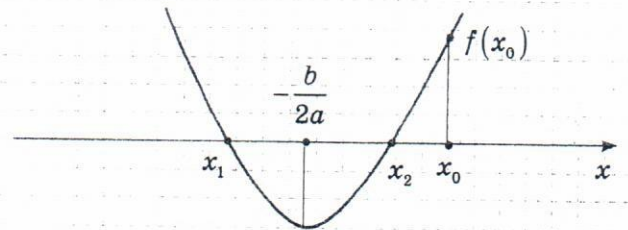


Рис. 9

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < x_0, \\ f(x_0) > 0. \end{cases}$$

2) Рис. 10.

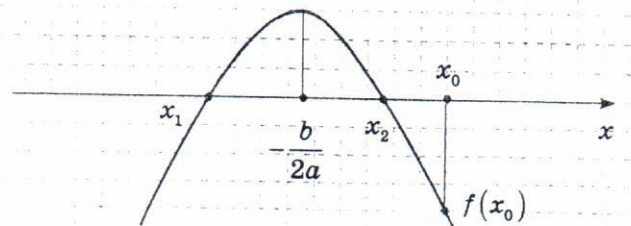


Рис. 10