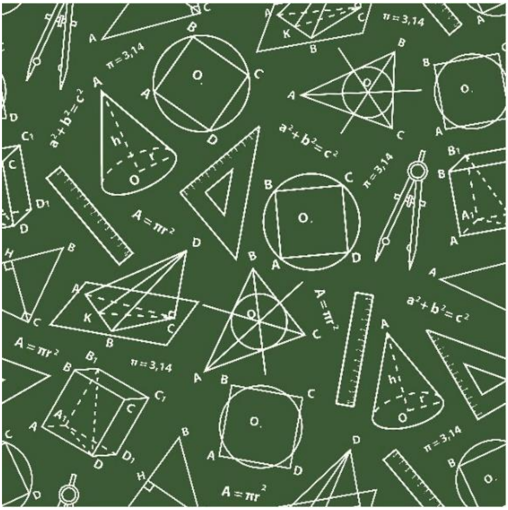
Муниципальная общеобразовательное учреждение

«Средняя общеобразовательная школа №1»

города Магнитогорска

Занимательная Геометрия



Автор проекта: Пасеев Данил,

Учащийся 7 «Б» класса МОУ «СОШ №1»

Наставник: Илюшкина Е.Л.,

Учитель математики.

2022

Предисловие

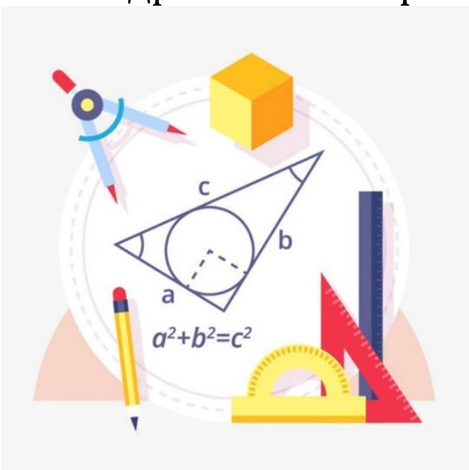
Пребудет вечной истина, как скоро
Её познает слабый человек!
И ныне Теорема Пифагора верна,
Как и в его далёкий век.

Адельберт Фон Шамиссо (1781-1838) - немецкий поэт и естествоиспытатель

Данный сборник содержит занимательный материал по геометрии, который способствует расширению кругозора о **математики древнего мира**

Задания сборника представлены несколькими разделами: «Доказательства для новичков» и «Доказательства для продвинутых».

Задания направлены на усвоение новых доказательств, закрепление и повторение изученного материала в школьном курсе. Они будут интересны подросткам и взрослым.



Доказательства для новичков

Доказательство №1

Этот метод сочетает в себе алгебру и геометрию и может рассматриваться как вариант древнеиндийского доказательства математика Бхаскари.

Постройте прямоугольный треугольник со сторонами **a, b** и **c** (рис.1). Затем постройте два квадрата со сторонами, равными сумме длин двух катетов, – **(a+b)**. В каждом из квадратов выполните построения, как на рисунках 2 и 3.

В первом квадрате постройте четыре таких же треугольника, как на рисунке 1. В результате получаться два квадрата: один со стороной а, второй со стороной **b**. Во втором квадрате четыре построенных аналогичных треугольника образуют квадрат со стороной, равной гипотенузе **c**. Сумма площадей построенных квадратов на рис.2 равна площади построенного нами квадрата со стороной с на рис.3. Это легко проверить, высчитав площади квадратов на рис. 2 по формуле. А площадь вписанного квадрата на рисунке 3. путем вычитания площадей четырех равных между собой вписанных в квадрат прямоугольных треугольников из площади большого квадрата со стороной **(a+b)**.

Записав все это, имеем: $\mathbf{a^2+b^2=(a+b)^2 - 2ab}$. Раскройте скобки, проведите все необходимые алгебраические вычисления и получите, что $\mathbf{a^2+b^2= a^2+b^2}$. При этом площадь вписанного на рис.3. квадрата можно вычислить и по традиционной формуле $\mathbf{S=c^2}$. Т.е. $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$ – вы доказали теорему Пифагора.

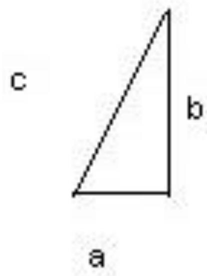


рис.1

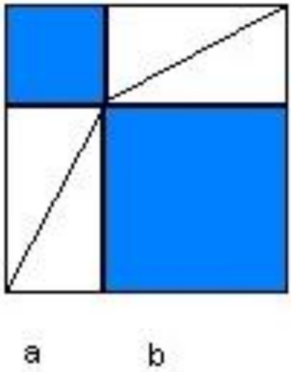


рис.2

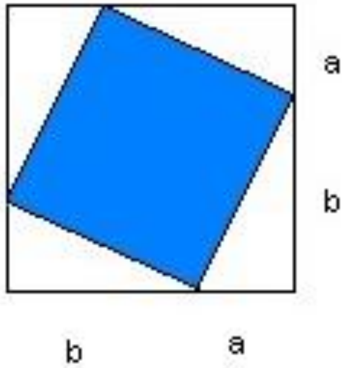


рис.3

Доказательство №2

Само же древнеиндийское доказательство описано в XII веке в трактате «Венец знания» («Сиддханта широмани») и в качестве главного аргумента автор использует призыв, обращенный к математическим талантам и наблюдательности учеников и последователей: «Смотри!».

Но мы разберем это доказательство более подробно: внутри квадрата постройте четыре прямоугольных треугольника так, как это обозначено на чертеже. Сторону большого квадрата, она же гипотенуза, обозначим **c**. Катеты треугольника назовем **a** и **b**. В соответствии с чертежом сторона внутреннего квадрата это **(a-b)**.

Используйте формулу площади квадрата $S=c^2$, чтобы вычислить площадь внешнего квадрата. И одновременно высчитайте ту же величину, сложив площадь внутреннего квадрата и площади всех четырех прямоугольных треугольников:

$$(a-b)^2 2+4*1\backslash 2*a*b.$$

Вы можете использовать оба варианта вычисления площади квадрата, чтобы убедиться: они дадут одинаковый результат. И это дает вам право записать, что $c^2=(a-b)^2+4*1\backslash 2*a*b$. В результате решения вы получите формулу теоремы Пифагора $c^2=a^2+b^2$. Теорема доказана.

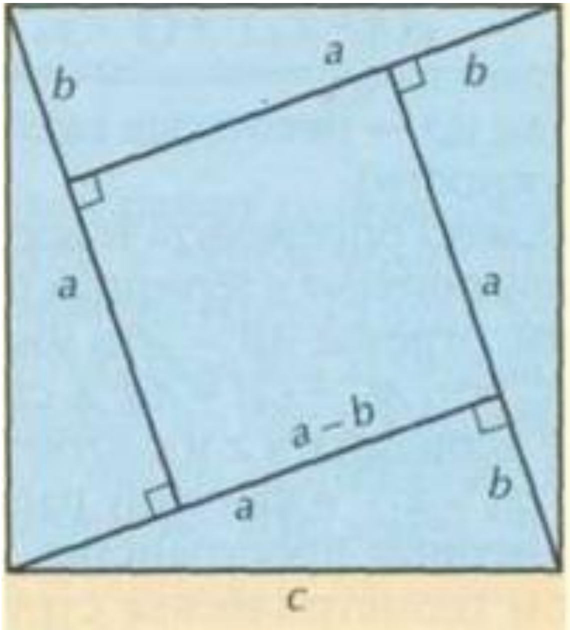


Рис. 1

Доказательство №3

Это любопытное древнекитайское доказательство получило название «Стул невесты» - из-за похожей на стул фигуры, которая получается в результате всех построений: в нем используется чертеж, который мы уже видели на рис.3 во втором доказательстве. А внутренний квадрат со стороной с построен так же, как в древнеиндийском доказательстве, приведенном выше.

Если мысленно отрезать от чертежа на рис.1 два зеленых прямоугольных треугольника, перенести их к противоположным сторонам квадрата со стороной с и гипотенузами приложить к гипотенузам сиреневых треугольников, получится фигура под названием «стул невесты» (рис.2). Для наглядности можно то же самое проделать с бумажными квадратами и треугольниками. Вы убедитесь, что «стул невесты» образуют два квадрата: маленькие со стороной **b** и большой со стороной **a**.

Эти построения позволили древнекитайским математикам и нам вслед за ними прийти к выводу, что $c^2=a^2+b^2$.

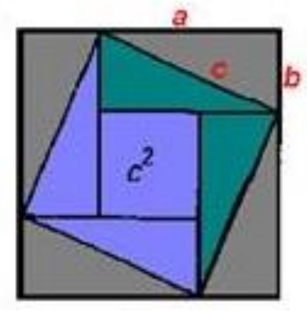


Рис.1.

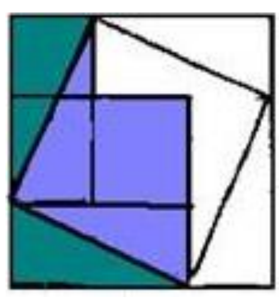
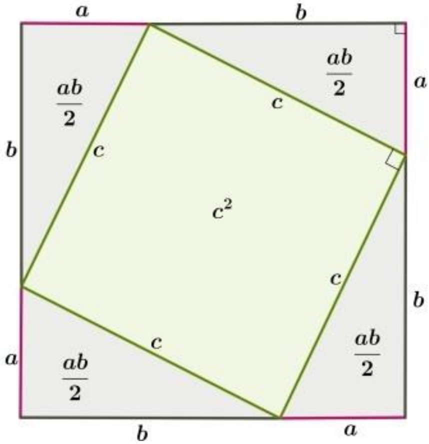


Рис. 2

Доказательство №4

Методом площадей

Первоначально требуется дополнительное построение – рисуется квадрат, каждая из сторон которого равна сумме длин катетов a и b. Отложив эти длины, проведем гипотенузы у прямоугольных треугольников:



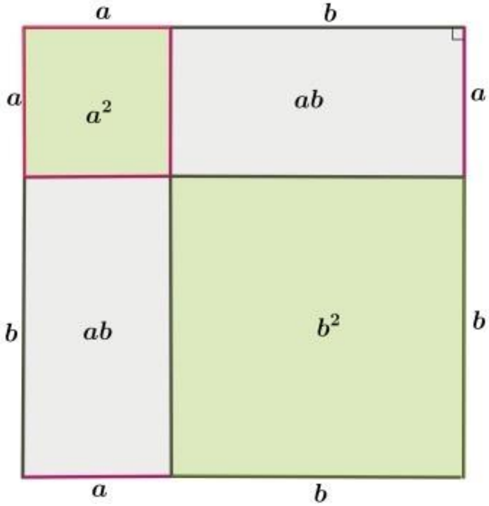
Очевидно, что внутренний четырехугольник, образованный четырьмя гипотенузами, будет квадратом, так как все его стороны равны, а углы прямые. Последнее следует из того, что сумма двух углов треугольника, построенных на гипотенузе равна 90º. Вычитая это значение из развернутого угла в 180º получаем как раз прямой угол.

Площадь внешнего квадрата включает в себя:

сумму площадей четырех прямоугольных треугольников;

площадь внутреннего квадрата.

Изменив расположение отрезков на сторонах квадрата и проведя новое построение, можно получить два внутренних квадрата и два прямоугольника. При этом, прямоугольники всегда будут равны, а квадраты будут равными только в частном случае – при равенстве сторон a и b.



Значит:

$4ab^2=2ab \Rightarrow c^2=a^2+b^2$, что и нужно было доказать.

Доказательства для Продвинутых

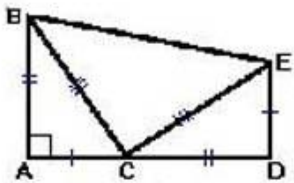
Доказательство №1

Это еще один способ найти решение для теоремы Пифагора, опираясь на геометрию. Называется он «Метод Гарфилда».

Постройте прямоугольный треугольник ABC. Нам надо доказать, что BC2=AC2+AB2.

Для этого продолжите катет AC и постройте отрезок CD, который равен катету AB. Опустите перпендикулярный AD отрезок ED.

Отрезки ED и AC равны. Соедините точки E и B, а также E и C и получите чертеж, как на рисунке ниже:



Чтобы доказать терему, мы вновь прибегаем к уже опробованному нами способу: найдем площадь получившейся фигуры двумя способами и приравняем выражения друг к другу.

Найти площадь многоугольника ABED можно, сложив площади трех треугольников, которые ее образуют. Причем один из них, ECB, является не только прямоугольным, но и равнобедренным. Не забываем также, что AB=CD, AC=ED и BC=CE – это позволит нам упростить запись и не перегружать ее. Итак, SABED=2*1/2(AB*AC)+1/2BC2.

При этом очевидно, что ABED – это трапеция. Поэтому вычисляем ее площадь по формуле:

$$SABED=(DE+AB)*1/2AD.$$

Для наших вычислений удобней и наглядней представить отрезок AD как сумму отрезков AC и CD.

Запишем оба способа вычислить площадь фигуры, поставив между ними знак равенства:

$$AB*AC+1/2BC2=(DE+AB)*1/2(AC+CD).$$

Используем уже известное нам и описанное выше равенство отрезков, чтобы упростить правую часть записи:

$$AB*AC+1/2BC2=1/2(AB+AC)2.$$

А теперь раскроем скобки и преобразуем равенство:

$$AB*AC+1/2BC2=1/2AC2+2*1/2(AB*AC)+1/2AB2.$$

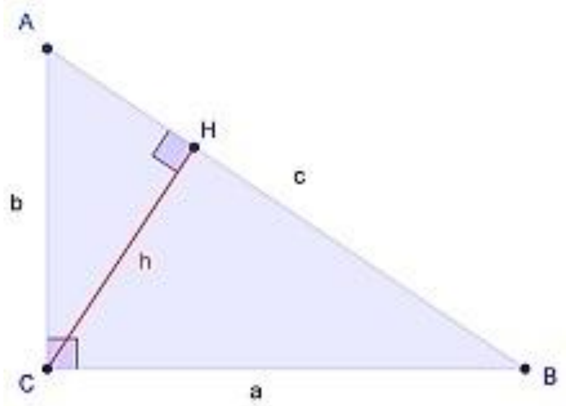
Закончив все преобразования, получим именно то, что нам и надо: BC2=AC2+AB2. Мы доказали теорему.

Доказательство №2

Доказательство через подобные треугольники

Это доказательство – одно из наиболее простых, так как является прямым следствием аксиом и не оперирует понятием площади.

Имеется прямоугольный треугольник ABC, где C = 90º. Высота, проведенная из прямого угла пересечет гипотенузу в точке H.



Полученные треугольники ACH и CHB подобны треугольнику ABC по двум углам. Отсюда получаем:

$$CB/AB=HB/CB,\ AC/AB=AH/AC$$

Это соответствует:

$$CB^2=AB\times HB,\ AC^2=AB\times AH$$

Сложив между собой квадраты катетов, получаем:

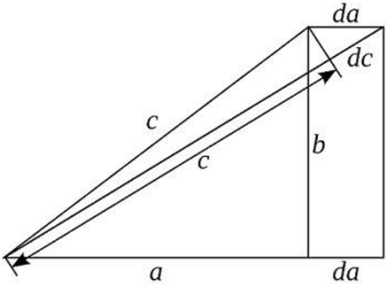
$$AC^2+CB^2=AB\times(HB+AH)=AB^2$$

Это и требовалось доказать.

Доказательство №3

Методом бесконечных малых

Данное доказательство делается с помощью интегрального исчисления. Рассматривается ситуация для бесконечно малых приращений сторон треугольника, составляется дифференциальное уравнение и находится его производная.



В начале вводится величина d. На это значение увеличивается катет a и гипотенуза c, а катет b остается неизменным. Отсюда имеем

$$da/ca = c/a,\ b = const$$

Разделяя переменные составляется дифференциальное уравнение:

$$c \times dc = a \times da$$

Для его решения необходимо проинтегрировать обе части, при этом получается соотношение:

$$c^2 = a^2 + const$$

определяя из начальных условий константу интегрирования, получим:

$$a = 0 \Rightarrow c^2 = b^2 = const$$

Таким образом мы определяем, что

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема доказана!

Доказательство №4

Доказательство Евклида

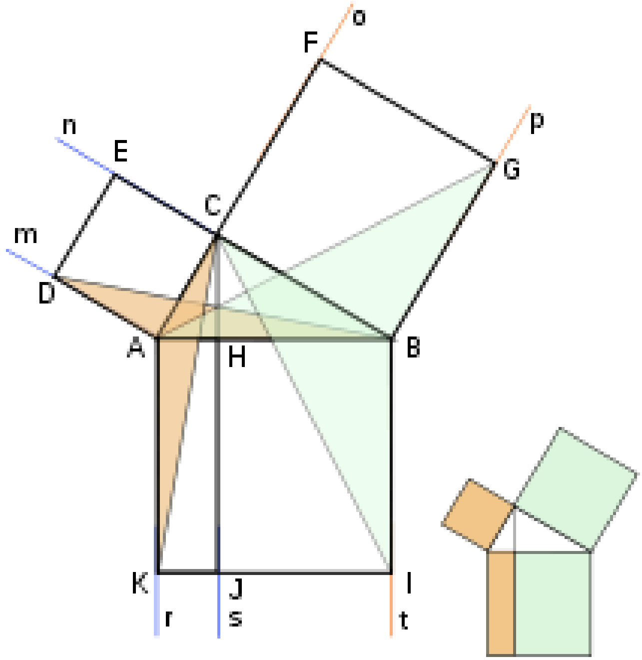
Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги "Начал". На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника ABC строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник BJLD равновелик квадрату ABFH, а прямоугольник JCEL - квадрату AC КG. Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе.

В самом деле, затушеванные на рисунке треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними:

FB = AB, BC = BD и $P_{FBC} = P_{ABD}$. Но $S_{ABD} = 1/2\ S_{BJLD}$, так как у треугольника ABD и прямоугольника BJLD общее основание BD и общая высота LD. Аналогично $S_{FBC} = 1/2\ S_{ABFH}$ (BF-общее основание, AB - общая высота). Отсюда, учитывая, что $S_{ABD} = S_{FBC}$, имеем $S_{BJLD} = S_{ABFH}$. Аналогично, используя равенство треугольников BCК и ACE, доказывается, что $S_{JCEL} = S_{ACKG}$. Итак,

$$S_{ABFH} + S_{ACKG} = S_{BJLD} + S_{JCEL} = S_{BCED},$$

что и требовалось доказать.


o
F
p
n
E
G
C
m
D
A
H
B
K
J
I
r
s
t

Содержание

Использованная литература

1)https://pandia.ru/text/79/553/44060.php
2)https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/433240/Sokrovishche_geometrii
3)https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Пифагора
4)https://blog.tutoronline.ru/teorema-pifagora
5)https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1095872
6)https://spacegid.com/pifagor.html#i-3
7)https://klub-kod.ru/images/proekt/Matem6.pdf
8)https://subscribe.ru/group/dlya-durakov/11712188/
9)https://mystroimmir.ru/filosofiya/pifagor.html
10)https://урок.рф/library/«razlichnie_sposobi_dokazatelstva__teoremi_pifagor_191407.html
11)https://wiki.fenix.help/matematika/teorema-pifagora
12) http://gimn1567.ru/dost/vasilev/k%20rab3.html