Методическая разработка для учителя

Сефибеков Сефибек Рамазанович

ЗАДАЧА ОДНА – РЕШЕНИЯ РАЗНЫЕ

От автора

Здесь дается разные решения 26 математических задач из различных разделов математики. Данный материал ставит своей целью помочь учащемуся самостоятельно овладеть методами решения задач. Это определило структуру изложения. Ознакомление с решениями позволяет учащемуся при самой минимальной помощи со стороны учителя овладеть разными методами решения одной и той же задачи.

Основная цель данного материала заключается в том, чтобы оказать помощь учителю в его работе.

12.01.22г.

С. Сефибеков.

ЗАДАЧА ОДНА - РЕШЕНИЯ РАЗНЫЕ

Основной целью обучения математике, наряду с твердым усвоением достаточного запаса математических знаний, умений и навыков, является воспитание самостоятельного, активного мышления учащихся. Мышление учащихся развивается в процессе решения задач. Надо отметить, что хотя около половины времени, отводимого программой на прохождение курса математики в школе, посвещается решению задач, умение серьезно работать над задачей не у всех учащихся бывает достаточно развито: нет активной, сознательной самостоятельной работы учащихся.

Возможность активно проявить себя в усвоении математических знаний пробуждает интерес учащихся к разбираемому вопросу и содействует лучшему усвоению его. Между тем такая работа над задачей приводит к положительным результатам, углубляет знания и умения учащихся.

Одним из путей формирования навыков сознательной, активной работы учащихся над математической задачей является решение задачи различными способами. Рассматривая ту или иную задачу, следует показывать учащимся возможность ее решения различными способами. Поиски наиболее рационального способа решения будят мысль учащегося, развивают сообразительность и уводят его от шаблона, повышают интерес к работе. В процессе подготовки к занятиям учителю необходимо продумывать всевозможные способы решения каждой задачи. Полезно одну и ту же задачу предлагать на разных стадиях обучения. Это дает возможность повторить ранее изученный материал, способствует более глубокому и прочному овладению материалом, его систематизации, выявлению взаимных связей, сходства и различия с новым материалом.

В школьных учебниках математики задачи распределены по темам и решаются каким-то одним шаблонным методом. А решения задачи разными методами в них почти отсутствуют. Конечно, учителю не хватает времени показать учащимся на одном уроке разные методы решения одной и той же задачи. Ведь некоторые задачи допускают несколько различных решений! Выход из такого положения дают повторно-обобщающие уроки по темам, индивидуальные и внеклассные занятия.

Приведем несколько задач, относящихся к различным разделам математики.

1. Алгебра и анализ

1. В хозяйстве были куры и овцы. Всего 75 голов и ног. Сколько было овец и сколько кур?

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (V - VI кл.)

У овцы 4 ноги и 1 голова - всего их 5. Если в хозяйстве были бы только овцы, то их было бы 75 : 5 = 15. Так как известно, что имеются еще и куры, то овец меньше 15. Проведем испытания, составив таблицу 1.

Таблица 1

Количество овец	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Количество голов и ног	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
Дополнение количества голов и ног до 75	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70

Учитывая, что у курицы 2 ноги и 1 голова - всего их 3, то число голов и ног у кур должно быть кратно 3. Как видно из третьей строки таблицы, числа, кратные 3, будут 15, 30, 45 и 60. Отсюда кур соответственно будет: 15 : 3 = 5, 30 : 3 = 10, 45 : 3 = 15 и 60 : 3 = 20. Следовательно, имеем следующие пары: (куры, овцы) = (5;12), (10;9), (15;6), (20;3)

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (VIII кл.)

Пусть кур было x, а овец y. Тогда имеем уравнение:

$$3x + 5y = 75, \tag{1}$$

где x и y - натуральные числа. Запишем равенство (1) так: $x + 5\cdot\frac{y}{3} = 25$.

Так как x - натуральное число, то $\frac{y}{3}$ - тоже натуральное число . Пусть $\frac{y}{3} = Z$; тогда $x + 5Z = 25$, $x = 25 - 5Z$ и $y = 3Z$. По условию задачи $x > 0$ и $y > 0$.

Поэтому имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} 25-5Z>0, \\ 3Z>0, \end{cases} \qquad \text{откуда } 0<Z<5.$$

Так как Z - целое число, то Z = 1; 2; 3; 4.

Итак, имеем 4 решения, представленные таблицей 2.

Таблица 2

Z	1	2	3	4
$x = 25 - 5Z$	20	15	10	5
$y = 3Z$	3	6	9	12

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ (VIII кл.)

Нами получено уравнение (1). Задача сводится к нахождению натуральных решений этого уравнения. Заметим, что пара $(x; y) = (20; 3)$ - решение уравнения (1):

$$3 \cdot 20 + 5 \cdot 3 = 75 \qquad (2)$$

Вычитая почленно равенства (1) и (2), имеем:

$$3(x-20)+5(y-3)=0, \text{ или } x=\frac{5(3-y)}{3}+20.$$

Так как числа 5 и 3 - взаимно простые, то положим $3 - y = 3t$ (t - целое). Тогда $x = 5t + 20$ и $y = 3 - 3t$. По условию $x; y > 0$. Поэтому имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} 5t+20>0, \\ 3-3t>0, \end{cases} \qquad \text{откуда} \quad -4<t<1.$$

Отсюда $t = -3; -2; -1; 0$. Следовательно, имеем 4 решения, представленные таблицей 3.

Таблица 3

t	-3	-2	-1	0
$x = 5t + 20$	5	10	15	20
$y = 3 - 3t$	12	9	6	3

2. Летели воробьи и сели на два дерева. Если со второго дерева пересядут на первое 50 воробьев, то на первом дереве их станет в 2 раза больше, чем на втором. Если же с первого дерева пересядут 5 воробьев на

второе, то на первом дереве их станет в 6 раз меньше, чем на втором. Сколько воробьев село на каждое дерево ? (VII кл.)

Обычное решение сводится к системе:

$$\begin{cases} x+50=2(y-50), \\ 6(x-5)=y+5, \end{cases}$$

где x - число воробьев на первом дереве,

y - число воробьев на втором дереве.

Дадим такое решение. Пусть на первом дереве сидят $(2x-50)$ воробьев, а на втором $(x+50)$. Первое условие задачи выполняется (проверьте !). По второму условию имеем уравнение: $6(2x-55)=x+55$, откуда $x=35$. Отсюда на первом дереве $2x-50=2\cdot 35-50=20$ (воробьев), а на втором $x+50=35+50=85$ (воробьев).

Ответ: 20 и 85.

3. Данное положительное число a разбить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Ответ: Число надо разбить на два равных слагаемых.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью неравенства Коши; VIII кл.)

Пусть слагаемые равны x и y. Тогда $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, откуда $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{a^2}{4}$. Наибольшее $xy=\frac{a^2}{4}$ при $x=y=\frac{a}{2}$, т.е. когда эти числа равны.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (с выделением полного квадрата; VII кл.)

Пусть слагаемые равны x и y. Возьмем очевидное тождество: $xy=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$, откуда $xy=\frac{a^2-(x-y)^2}{4}$. Наибольшее $xy=\frac{a^2}{4}$ при $x=y$.

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ (с выделением полного квадрата; VII кл.)

Пусть первое слагаемое x, тогда второе слагаемое $a-x$. Имеем:

$$x(a-x)=-(x^2-2x\cdot\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4})=-((x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4})=-(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{4}.$$

Откуда наибольшее произведение равно $\frac{a^2}{4}$ и достигается оно при $x=\frac{a}{2}$.

Тогда и $y = \frac{a}{2}$.

ЧЕТВЕРТОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью графика; VIII кл.)

Пусть первое слагаемое x, тогда второе слагаемое $a - x$. Графиком функции $f(x) = x(a - x) = ax - x^2$ служит парабола, ветви которой направлены вниз. Следовательно, наибольшее значение эта функция достигает в вершине параболы, т.е. при $x = \frac{a}{2}$. Тогда и $y = \frac{a}{2}$.

ПЯТОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью квадратного уравнения; VIII кл.)

Пусть первое слагаемое x и произведение t. Тогда второе слагаемое $a - x$ и $x(a - x) = t$, $x^2 - ax + t = 0$, $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4t}}{2}$. Откуда $a^2 - 4t \geq 0$, $t \leq \frac{a^2}{4}$. Наибольшее $t = \frac{a^2}{4}$ при $x = \frac{a}{2}$. Тогда и $y = \frac{a}{2}$.

ШЕСТОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью окружности; VIII - IX кл.)

Возьмем окружность ω с центром в точке O и диаметром MN = a (рис.1). На отрезке OM возьмем точку P. Пусть MP = x, NP = y. Построим к точке P перпендикуляр PK (K∈ω). Тогда xy = PK^2. Приблизим теперь точку P к точке N. Тогда слева от точки O длина отрезка PK будет увеличивается, а справа от точки O - уменьшаться. Следовательно, наибольшую длину отрезок PK будет иметь, когда P = 0, т.е. когда PK = OA = $\frac{a}{2}$ - радиусу окружности ω. Но тогда $x = y = \frac{a}{2}$.

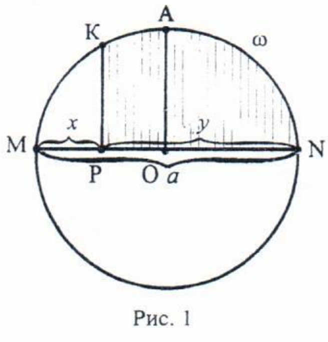

Рис. 1

СЕДЬМОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью производной; X кл.)

Пусть первое слагаемое x, тогда второе слагаемое $a - x$. Рассмотрим функцию $f(x) = x(a - x) = ax - x^2$, где $0 < x < a$. Тогда $f'(x) = a - 2x = 0$,

$x = \frac{a}{2}$ - критическая точка. Так как $f(0) = f(a) = 0$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения при $x = \frac{a}{2}$. Тогда и $y = \frac{a}{2}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Эту задачу можно обобщить на случай n слагаемых, воспользовавшись неравенством Коши.

4. Если произведение двух положительных чисел постоянно, то сумма этих чисел достигает своего наименьшего значения при равенстве этих чисел. Доказать.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (с выделением полного квадрата; VII кл.)

Пусть числа равны x и y, их произведение равно a. Возьмем очевидное тождество $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$. Отсюда $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4a$. Если сумма $x + y$ - наименьшая, то и квадрат суммы $(x + y)^2$ - наименьший. Но $(x + y)^2$ достигает своего наименьшего значения при $x = y$. Следовательно, наименьшее значение суммы $x + y$ достигается при $x = y$.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью квадратного уравнения; VIII кл.)

Пусть первое число x, a - произведение, t - сумма. Тогда второе число $\frac{a}{x}$ и $x + \frac{a}{x} = t$, $x^2 - tx + a = 0$, $x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4a}}{2}$, откуда $t^2 - 4a \geq 0$, т.е. $t \geq 2\sqrt{a}$. Наименьшее $t = 2\sqrt{a}$ при $x = \frac{a}{x} = \sqrt{a}$, т.е. когда числа равны.

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ (с помощью неравенства Коши; VIII кл.)

Пусть x и y - данные числа, a - их произведение.

Тогда $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{a}$. Наименьшее $x + y = 2\sqrt{a}$ и достигается оно при $x = y = \sqrt{a}$.

ЧЕТВЕРТОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью графика; IX кл.)

Пусть числа равны x и y, их произведение равно a. Тогда $y = \frac{a}{x}$, $x + y = x + \frac{a}{x}$, где $x > 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = x + \frac{a}{x}$ $(x > 0)$. Строим график этой функции сложением графиков функций $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \frac{a}{x}$. Для достаточно больших x $\frac{a}{x} \approx 0$, поэтому для таких x $f(x) \approx x$ - наклонная асимптота графика функции $f(x)$ (графики изображены на рисунке 2). Наименьшее значение достигается при $x = \frac{a}{x}$, т.е. при $x = \sqrt{a}$. Но тогда и $y = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$, т.е. числа x и y равны.

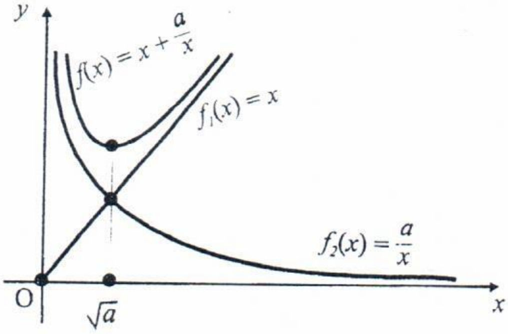

Рис. 2

ПЯТОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью производной; X кл.)

Пусть x - первое число, a - произведение. Тогда второе число $\frac{a}{x}$. Рассмотрим функцию $f(x) = x + \frac{a}{x}$, где $x > 0$. $f' = (x) = 1 - \frac{a}{x}{}_2 = 0$, $x = \sqrt{a}$ - критическая точка. Если $x \in (0;\ \sqrt{a}\,)$, то $f'(x) < 0$ (проверьте, например, при $x = \frac{\sqrt{a}}{2}$); если $x \in (\sqrt{a}\,;\ +\infty)$, то $f'(x) > 0$ (проверьте, например, при $x = 2\sqrt{a}$.

Следовательно, функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения в точке $x = \sqrt{a}$, т.е. при $x = \frac{a}{x}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Эту задачу можно обобщить на случай n множителей, воспользовавшись неравенством Коши.

5. Не пользуясь теоремой Виета, доказать, что каковы бы ни были числа x_1 и x_2, можно составить квадратное уравнение, корнями которого будут эти числа и только они. (VIII кл.).

РЕШЕНИЕ. Составим произведение:

$$a_0(x - x_1)(x - x_2), \qquad (1)$$

где a_0 - любое число, отличное от нуля. При $x = x_1$ двучлен $x - x_1$ обращается в нуль, значит, при этом значении x обращается в нуль и произведение (1). То же самое происходит при $x = x_2$.

Пусть теперь $x = m$, где m - число, отличное от x_1 и x_2. Ни одна из разностей $m - x_1$, $m - x_2$ не равна нулю. Число a_0 также отлично от нуля. Значит, и произведение $a_0(m - x_1)(m - x_2)$ отлично от нуля. Таким образом:

$$a_0(x - x_1)(x - x_2) = 0 \tag{2}$$

имеет корнями x_1 и x_2 и только эти числа.

Раскрыв скобки и выполнив приведение подобных членов, получим в левой части уравнения (2) квадратный трехчлен относительно неизвестного x, т.е.

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0 \tag{2'}$$

Корнями уравнения (2′) являются числа x_1, x_2 и только эти числа.

6. Каковы бы ни были числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, можно составить уравнение n-й степени, корнями которого будут эти числа и только они. Доказать. (Обобщение задачи 5; VIII кл.).

Здесь аналогами равенств (2) и (2′) будут равенства:

$$a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0 \tag{3}$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{3'}$$

7. Разложить многочлен n-й степени

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

на множители, если известно, что он имеет корни. (VIII кл.)

РЕШЕНИЕ. Если многочлен $f(x)$ имеет n корней $x_1, x_2, \dots, x_n$, то, согласно равенствам (3) и (3′), имеем:

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \tag{4}$$

Если многочлен $f(x)$ имеет k корней ($k < n$): $x_1, x_2, \dots, x_k$, то равенство (4) примет вид:

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) \cdot q(x),$$

где $q(x)$ - многочлен $(n - k)$-й степени.

Если многочлен $f(x)$ имеет k равных корней: $x_1 = x_2 = ... = x_k$ (здесь говорят, что x_1 есть k - кратный корень), то равенство (4) примет вид:

$$f(x) = a_0(x - x_1)^k \cdot q(x),$$

где $q(x)$ - многочлен $(n - k)$-й степени.

8. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$ (VIII кл.).

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ. Данное уравнение имеет корни:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Их квадраты:

$$x_1^2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2^2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

Согласно равенству (2) имеем:

$$a_0(x - \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}) \cdot (x - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}) = 0$$

Положим, $a_0 = 4$. Тогда получим:

$$((2x - 7) + 3\sqrt{5}) \cdot ((2x - 7) - 3\sqrt{5}) = 0, (2x - 7)^2 - (3\sqrt{5})^2 = 0,$$

откуда $x^2 - 7x + 1 = 0$ - искомое уравнение.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью теоремы Виета). Согласно формулам Виета, искомое уравнение имеет коэффициенты:

$$\mathrm{P} = -(x_1^2 + x_2^2) = -7,$$

$$q = x_1^2 \cdot x_2^2 = \frac{7^2 - 3^2 \cdot 5}{4} = 1.$$

Искомое уравнение: $x^2 - 7x + 1 = 0$.

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ. Пусть x_1 и x_2 - корни данного уравнения. Тогда искомое уравнение имеет коэффициенты $\mathrm{P} = -(x_1^2 + x_2^2)$ и $q = x_1^2 \cdot x_2^2$. Преобразуем их так, чтобы легко можно было выразить непосредственно через коэффициенты данного уравнения, минуя вычисления x_1^2 и x_2^2.

Имеем:

$$\mathrm{P} = -(x_1^2 + x_2^2) = -(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2) =$$

$= -(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2,\ q = x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1 \cdot x_2)^2.$

Но $x_1 + x_2 = 3$; $x_1 \cdot x_2 = 1$. Следовательно, $P = -3^2 + 2 \cdot 1 = -7$; $q = 1^2 = 1$. Искомое уравнение: $x^2 - 7x + 1 = 0$. Мы пришли к тому же ответу, но при значительно меньших вычислениях.

9. Найти два положительных числа, если известно, что их сумма равна 30, а сумма их квадратов равна 468. (VIII кл.).

РЕШЕНИЕ. Обозначим искомые числа через x и y. Тогда по условию имеем систему:

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ x^2 + y^2 = 468 \end{cases} \quad (1)$$

Дадим два решения системы (1), отличные от традиционного способа подстановки.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ. Из первого уравнения имеем:

$$\frac{x+y}{2} = 15. \quad (2)$$

Пусть

$$\frac{x-y}{2} = Z. \quad (3)$$

Складывая и вычитая почленно равенства (2) и (3), получим: $x = 15 + Z$ и $y = 15 - Z$. Подставляя эти значения x и y во второе уравнение системы, получим: $(15 + Z)^2 + (15 - Z)^2 = 468$, откуда $Z^2 = 9$, $Z_{1;2} = \pm 3$. Если $Z_1 = -3$, то $x = 12$ и $y = 18$; если $Z_2 = 3$, то $x = 18$ и $y = 12$. Ответ: 12 и 18.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ. Заметим, что $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 30^2 - 2xy = 468$, откуда $xy = 216$. Тогда система (1) запишется в равносильном виде:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 216. \end{cases} \quad (1')$$

Таким образом, задачу 9 можно сформулировать следующим образом.

9′. Найти два числа, сумма которых равна 30, а произведение 216 (см.(1′)).

Обозначим разность искомых чисел через $\pm 2x$. Тогда эти числа равны $15 + x$ и $15 - x$. Их произведение $225 - x^2 = 216$; $x^2 = 9$; $x_{1;2} = \pm 3$. При $x_1 = +3$ числа равны 18 и 12; при $x_2 = -3$ числа равны 12 и 18.

10. Решить уравнение:

$$(3x-1)\sqrt{x-4}=17\sqrt{2} \qquad (1)$$

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью производной; X кл.).

Область определения уравнения (1) - промежуток $[4; +\infty)$. Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим равносильное уравнение:

$$9x^3-42x^2+25x-582=0. \qquad (2)$$

Найдем критические точки функции-многочлена[1]

$$f(x)=9x^3-42x^2+25x-582:$$

$$f'(x)=27x^2-84x+25=0, \text{ откуда } x=\frac{1}{3} \text{ и } x=\frac{25}{9}.$$

Обе критические точки не входят в область определения уравнения (1). Поэтому ищем нуль функции в промежутке $[4; +\infty)$, где $f'(x)>0$. В этом промежутке функция возрастающая, она имеет единственный нуль. Так как: $f(4)=9\cdot4^3-42\cdot4^2+25\cdot4-582<0$ и $f(7)=9\cdot7^3-42\cdot7^2+25\cdot7-582>0$, то нуль функции принадлежит промежутку [4; 7]. Подбором найдем корень уравнения - он равен 6.

Ответ: 6.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (с использованием свойств функции; VIII кл.)

Запишем равенство (1) в равносильном виде:

$$(3x\text{-}1)\sqrt{x-4}-17\sqrt{2}=0$$

и рассмотрим функцию

$$f(x)=(3x-1)\sqrt{x-4}-17\sqrt{2},$$

где $x\in[4; +\infty)$. Ищем теперь нули функции $f(x)$. Докажем, что эта функция - возрастающая. Возьмем $x_1; x_2\in[4; +\infty)$ такие, что $x_2>x_1$. Составим разность: $f_2(x)-f_1(x)=(3x_2-1)\sqrt{x_2-4}-17\sqrt{2}-((3x_1-1)\sqrt{x_1-4}-17\sqrt{2}=$ $=(3x_2-1)\sqrt{x_2-4}-(3x_1-1)\sqrt{x_1-4}>0$, т.к. $f(x_1)>0, f(x_2)>0$ и при $x_2>x_1$ $3x_2-1>3x_1-1$, $\sqrt{x_2-4}>\sqrt{x_1-4}$ и $(3x_2-1)\sqrt{x_2-4}>(3x_1-1)\sqrt{x_1-4}$.

Таким образом, $f(x_2)>f(x_1)$, т.е. $f(x)$ - возрастающая функция. Поэтому она имеет единственный нуль - он равен 6. Ответ: 6.

---

[1] Многочлен - есть непрерывная и дифференцируемая функция на всей числовой прямой.

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ (VIII кл.)

В области определения уравнения (1) - на промежутке $[4; +\infty)$ нами получено уравнение (2). Пусть $x = a$ - корень уравнения (2). Тогда это уравнение запишется так (см. задачу 7):

$$9(x-a)(x^2+\frac{b}{9}x+\frac{c}{9})=0, \text{ или}$$

$$(x-a)(9x^2+bx+c)=0, \qquad (3)$$

где $$9x^3-42x^2+25x-582=(x-a)(9x^2+bx+c) \qquad (4)$$

(a, b, c - неизвестные числа, подлежащие отысканию). Из равенства (4) следует, что $ac = 582$. Если a; c - целые числа, то они делители числа 582.

Так как $a \in [4; +\infty)$ и $582 = 2 \cdot 3 \cdot 97$, то испытанию для корня a подлежат делители $2 \cdot 3 = 6$; 97; $2 \cdot 97 = 194$; $3 \cdot 97 = 291$ и 582. Заметим, что $a = 6$ - корень уравнения (2) (проверьте !). Тогда $c = 582 : 6 = 97$ и равенство (4) примет вид:

$$9x^3-42x^2+25x-582=(x-6)(9x^2+bx+97).$$

Положим, в этом равенстве, например, $x = 1$. Тогда получим: $590 = -5 \cdot (106+b)$, откуда $b = 12$.

Таким образом, при $a = 6$, $b = 12$, $c = 97$, равенство (4) примет окончательный вид:

$$9x^3-42x^2+25x-582=(x-6)(9x^2+12x+97).$$

Дискриминант квадратного трехчлена $9x^2+12x+97$ $D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 97 < 0$, поэтому больше корней нет. Следовательно, $x = 6$ - единственный корень уравнения.

Ответ: 6.

ЧЕТВЕРТОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью неравенств; VIII кл.).

Предположим, что множители, содержащие корни, равны. Тогда имеет место система:

$$\begin{cases} 3x-1=17, \\ \sqrt{x-4}=\sqrt{2}. \end{cases}$$

Решив ее, получим $x = 6$. Легко проверить, что число 6 является корнем данного уравнения. Докажем, что других корней данное уравнение не имеет. Действительно, при $x > 6$ справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} 3x-1>17, \\ \sqrt{x-4}>\sqrt{2}. \end{cases}$$

Тогда $(3x-1)\sqrt{x-4} > 17\sqrt{2}$.

Если $4 \le x < 6$, то имеет место система неравенств:

$$\begin{cases} 3x-1<17, \\ \sqrt{x-4}<\sqrt{2}. \end{cases} \text{ т.е.}$$

$$(3x-1)\sqrt{x-4} < 17\sqrt{2}.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 6$.

Ответ: 6.

11. Дифференцировать функцию:

а) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$,

б) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2+1}}$ (XI кл.).

РЕШЕНИЕ

а). Известные правила дифференцирования из школьного учебника здесь не помогут. Применим способ логарифмического дифференцирования. Сущность его заключается в следующем. Чтобы дифференцировать положительную функцию, берут ее логарифм и определяют затем производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскивают производную от заданной функции.

Для нашего примера имеем:

$\ln f(x) = x\ln x$,

$\dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln x + 1$, откуда

$f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1)$, т.е. $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$.

Чтобы перейти к следующему примеру, покажем на примере дифференцирование отрицательной функции способом логарифмического дифференцирования. Возьмем, например, функцию $f(x) = x^3$, где $x < 0$. Чтобы ее дифференцировать, возьмем положительную функцию $-f(x) = -x^3$. Тогда $\ln(-f(x)) = \ln(-x^3) = \ln(-x)^3 = 3\ln(-x)$ и $\dfrac{1}{-f(x)} \cdot (-f(x))' = 3 \cdot \dfrac{1}{-x} \cdot (-x)' = \dfrac{3}{x}$,

$\dfrac{1}{-f(x)} \cdot (-1) \cdot f'(x) = \dfrac{3}{x}$, откуда $f'(x) = f(x) \cdot \dfrac{3}{x} = x^3 \cdot \dfrac{3}{x} = 3x^2$, $f'(x) = 3x^2$.

Если бы мы дифференцировали способом логарифмического дифференцирования положительную функцию $f(x) = x^3$ $(x > 0)$, то опять получили бы: $f'(x) = 3x^2$. Значит, способ логарифмического дифференцирования не влияет на общий ответ.

б). Применим способ логарифмического дифференцирования. Имеем:

$$\ln f(x) = \ln\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2+1}},$$

или, применяя правила логарифмирования:

$$\ln f(x) = \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{5}\ln(x^2+1),$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2x}{5x^2+5}, \text{ откуда}$$

$$f'(x) = f(x)\cdot\left(\frac{1}{3x} - \frac{2x}{5x^2+5}\right), \text{ т.е.}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2+1}}\cdot\left(\frac{1}{3x} - \frac{2x}{5x^2+5}\right).$$

12. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 4x - 5$ и касательными к ней, проведенными через точки: (0; –5) и (4; –5). (XI кл.).

Справедлива следующая теорема. Для площади S фигуры, заключенной между графиками непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$ (где $f_2(x) \geq f_1(x)$) и прямыми $x = a$, $x = b$, справедливо равенство:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Доказательство. Известно, что если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции (рис. 3) выразится формулой:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (*)$$

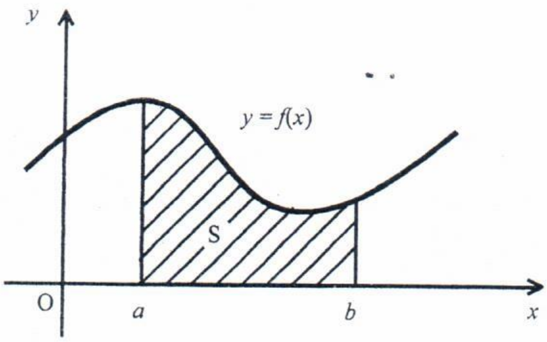

Рис. 3

Рассмотрим два возможных случая. Случай 1^0: $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$ (рис. 4).

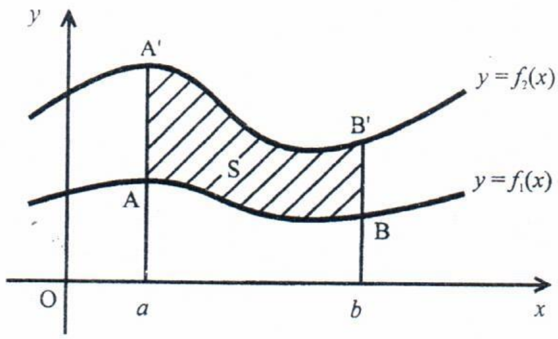

Рис. 4

Имеем (см.(*)):

$$S = \text{пл. } aA'B'b - \text{пл. } AABb = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx =$$

$$= F_2(x)\Big|_a^b - F_1(x)\Big|_a^b = (F_2(x) - F_1(x))\Big|_a^b = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

(где F - первообразная функция f).

Случай 2^0: Искомая площадь делится осью Ox на части или находится под осью Ox (рис. 5а, б).

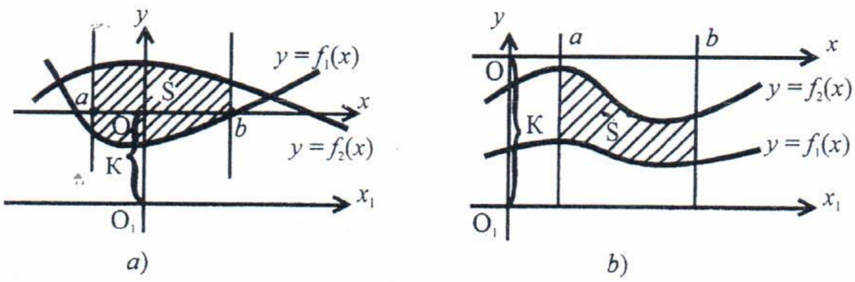

Рис. 5

Выполним параллельный перенос оси Оx на К единиц вниз так, чтобы искомая площадь оказалась по одну сторону от нее. Тогда получим новую систему координат yO_1x_1, в которой функции примут вид: $y = f_1(x) + K$ и $y = f_2(x) + K$. В системе yO_1x_1 имеем случай 1^0 для площади заштрихованной фигуры:

$$S = \int_a^b ((f_2(x) + K) - (f_1(x) + K))dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Теорема доказана.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ. Убедимся в том, что данные точки лежат на параболе: $-5 = -0^2 + 4 \cdot 0 - 5$; $-5 = -4^2 + 4 \cdot 4 - 5$. Найдем уравнения касательных. Подставляя в уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ сначала $x_0 = 0$, $y_0 = -5$ и $f'(x_0) = -2x_0 + 4 = -2 \cdot 0 + 4 = 4$, а затем $x_0 = 4$, $y_0 = -5$ и $f'(x_0) = -2x_0 + 4 = -2 \cdot 4 + 4 = -4$, получим $y = 4x - 5$ и $y = -4x + 11$.

Находим точку пересечения касательных:

$$\begin{cases} y = 4x - 5 \\ y = -4x + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Сделаем чертеж (рис. 6) и, учитывая симметричность фигуры относительно прямой $x = 2$, найдем ее площадь, используя теорему:

$$S = 2\int_0^2 ((4x - 5) - (-x^2 + 4x - 5))dx = 2\int_0^2 x^2 dx = \frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

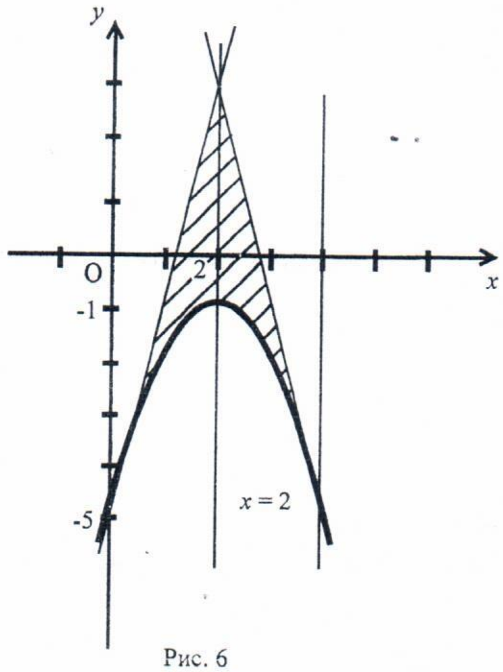

Рис. 6

13. Решите уравнение:

$$a\sin x + b\cos x = c, \qquad (1)$$

где a, b, c - постоянные, причем $a \neq 0$ и $b \neq 0$ (X кл.).

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ. Выразим $\cos x$ через $\sin x$ (или наоборот), используя тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, и возведем обе части уравнения в квадрат (следует помнить, что возведение в квадрат может привести к посторонним корням, поэтому проверка здесь необходима).

Пример. Решим уравнение:

$$3\cos x + 4\sin x = 5 \qquad (2)$$

Имеем: $3\cos x + 4 \cdot (\pm\sqrt{1-\cos^2 x}) = 5$,

$$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\cdot\cos x,$$

$$1 - \cos^2 x = (\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\cdot\cos x)^2,\ (5\cos x - 3)^2 = 0,\ \cos x = \frac{3}{5}.$$

Находим $\sin x = \pm\frac{4}{5}$.

Проверкой убеждаемся, что уравнение (2) удовлетворяют такие значения x, для которых одновременно $\cos x = \frac{3}{5}$ и $\sin x = \frac{4}{5}$, т.е. $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$. Следовательно, $x = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi n$, $n \in Z$ и n - четное, так как при $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$ угол x - угол I-ой четверти и наименьший положительный период sin и cos равен 2π.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ. Возведем данное уравнение в квадрат и умножим правую часть на тригонометрическую единицу $\sin^2 x + \cos^2 x$:

$$a^2\sin^2 x + 2ab\sin x\cos x + b^2\cos^2 x = c^2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \qquad (3)$$

Обе части этого уравнения разделим на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$), получим уравнение, равносильное уравнению (3), так как $\cos x$ (или $\sin x$) не является общим множителем левой и правой частей уравнения (3). Однако возведение в квадрат может привести к посторонним корням, поэтому проверка в данном случае необходима.

Для примера (2) имеем:

$$9\cos^2 x + 24\cos x \cdot \sin x + 16\sin^2 x = 25(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$9 + 24\operatorname{tg} x + 16\operatorname{tg}^2 x = 25\operatorname{tg}^2 x + 25, \quad \operatorname{tg} x = \frac{4}{3},$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi K,\ K \in Z. \qquad (4)$$

Проверкой определим целые значения K. Так как

$$(\operatorname{tg} x = \frac{4}{3} > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

то проверку произведем по системам совокупности. Для системы неравенств $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$ левая часть уравнения (2) отрицательна, поэтому система неравенств отпадает. Следовательно, выполняется вторая система совокупности. Отсюда угол x принадлежит I-й четверти. Учитывая, что 2π есть наименьший положительный период sin и cos, утверждаем: К - четное (см. ответ - равенство (4)).

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ. Формулы половинного аргумента сводят данное уравнение к равносильному однородному уравнению:

$$2a\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+b(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})=c(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}).$$

Для примера (2) имеем:

$$8\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+3(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})=5(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}).$$

Обе части этого уравнения разделим на $\cos^2\frac{x}{2}$ (можно делить и на $\sin^2\frac{x}{2}$).

Тогда получим равносильное уравнение (так как $\cos\frac{x}{2}$ не является общим множителем левой и правой частей этого уравнения):

$$4\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-4\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1=0.$$

Откуда: $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, т.е.[2]

$$x=2\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+2\pi K,\ K\in Z.$$

ЧЕТВЕРТОЕ РЕШЕНИЕ. Замена $\sin x=U$, $\cos x=V$ приводит данное уравнение к несложной алгебраической системе:

$$\begin{cases} aU+bV=c,\\ U^2+V^2=1.\end{cases}$$

Для примера (2) имеем систему:

$$\begin{cases} 4U+3V=5,\\ U^2+V^2=1.\end{cases}$$

Решения этой системы: $U=\frac{4}{5}$, $V=\frac{3}{5}$. Отсюда $\sin x=\frac{4}{5}$, $\cos x=\frac{3}{5}$, т.е. угол x - угол I-й четверти. Поэтому $\mathrm{tg}x=\frac{4}{3}$, $x=\mathrm{arctg}\frac{4}{3}+2\pi K$, $K\in Z$. (так как наименьший положительный период sin и cos равен 2π).

[2] Это тот же ответ, но записанный в другой форме.

ПЯТОЕ РЕШЕНИЕ. Сначала проверим, при каких постоянных a, b и c числа вида $x = (2K + 1)\pi$ будут решениями данного уравнения:

$$a\sin((2K + 1)\pi) + b\cos((2K + 1)\pi) = c,$$

$$a \cdot 0 + b \cdot (-1) = c, \text{ откуда } b + c = 0.$$

Следовательно, при любом a и $b + c = 0$ уравнение имеет корни вида: $x = (2K + 1)\pi$.

Теперь, предполагая $x \neq (2K + 1)\pi$, выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $Z = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ и составим общую формулу решения. Имеем:

$$\cos x = \frac{1 - Z^2}{1 + Z^2} \text{ и } \sin x = \frac{2Z^2}{1 + Z^2}.$$

Подставив эти соотношения в данное уравнение, после преобразований получим:

$$(b + c)Z^2 - 2aZ - (b - c) = 0, \qquad (5)$$

откуда

$$Z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

Исследуем квадратное уравнение (5).

1^0. Если $a^2 + b^2 \geq c^2$ и $b + c \neq 0$, то уравнение имеет действительные корни, а общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$x = 2\mathrm{arctg}\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + 2\pi K, \ K \in Z.$$

2^0. Если $a^2 + b^2 < c^2$, то уравнение (5) действительных корней не имеет и заданное уравнение решений не имеет.

3^0. Если $b + c = 0$, то уравнение (5) примет линейный вид: $Z = -\frac{b}{a}$.

Заданное уравнение имеет решения вида:

$$x = -2\mathrm{arctg}\frac{b}{a} + 2\pi K \quad (K \in Z) \text{ и}$$

$$x = (2n + 1)\pi \quad (n \in Z)$$ (см. вышеприведенное рассуждение).

Решим пример (2). Так как $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $4^2 + 3^2 = 5^2$ и $3 + 5 \neq 0$, то (см. 1^0): $x = 2\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi K, \ K \in Z$.

Геометрия

14. Доказать, что если в треугольнике медиана равна половине той стороны, к которой она проведена, то этот треугольник - прямоугольный.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (VII кл.)

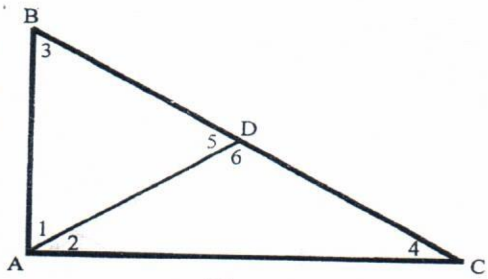

Рис.7

Пусть в треугольнике ABC (рис.7) AD - медиана и AD = BD = CD. Треугольники ABD и ADC - равнобедренные. Тогда $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. По свойству внешнего угла треугольника имеем: $\angle 5 = 2\angle 2$ и $\angle 6 = 2\angle 1$. Поэтому $\angle 5 + \angle 6 = 2\angle 1 + 2\angle 2 = 2(\angle 1 + \angle 2)$. Учитывая, что $\angle 5 + \angle 6 = 180°$, получим $2(\angle 1 + \angle 2) = 180°$, откуда $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, т.е. $\angle A = 90°$.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (IX кл.)

Опишем около треугольника ABC (рис.7) окружность с центром D и радиусом r = DA = DB = DC. Тогда BC - диаметр этой окружности и $\angle A = 90°$, как вписанный угол и опирающийся на диаметр.

Следующая задача - обратная задаче 14.

15. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. Доказать.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (VIII кл.)

Достроив треугольник ABC ($\angle A = 90°$) до прямоугольника ABEC, убедимся в том, что $AD = \frac{1}{2}BC$, где AD - медиана.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (IX кл.)

Опишем окружность около треугольника ABC ($\angle A = 90°$). Следовательно, точка D (середина гипотенузы) - центр описанной окружности, отсюда $AD = \frac{1}{2}BC$.

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ (VIII кл.)

Из конца медианы AD проведем $DE \parallel AB$ (рис.8). Тогда AE = CE, так как ВД =СД (теорема Фалеса). Отсюда $АД = СД = \frac{1}{2}BC$ (в треугольнике ADC прямая DE - ось симметрии).

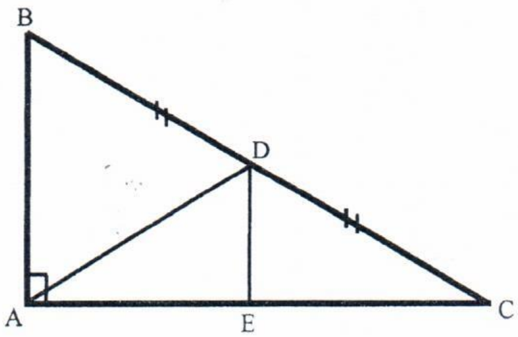

Рис.8

ЧЕТВЕРТОЕ РЕШЕНИЕ (VII кл.)

Воспользуемся методом от противного. Допустим, что $AD \neq \frac{1}{2}BC$. Тогда: 1) либо AD > CD; 2) либо AD < CD.

Пусть AD > CD. Тогда (рис. 9) $\angle 4 > \angle 2$ и $\angle 3 > \angle 1$ (учесть и AD > BD!), или $\angle 4 + \angle 3 > \angle 2 + \angle 1$. Но $\angle 4 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 1 = 90°$. Поэтому наше предположение неверно и AD не больше CD.

Аналогично докажем, что AD не меньше CD, т.е. AD = CD. Этим и доказано, что AD = $\frac{1}{2}$BC.

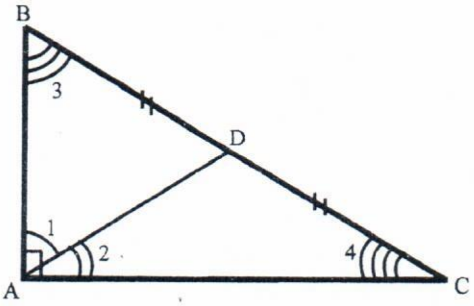

Рис. 9

ПЯТОЕ РЕШЕНИЕ (VIII кл.)

Известно, что $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. По теореме Пифагора $b^2 + c^2 = a^2$, тогда $m_a = \frac{1}{2}a$.

ШЕСТОЕ РЕШЕНИЕ (VIII кл.)

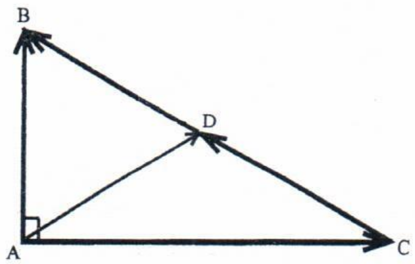

Рис. 10

Введем в рассмотрение векторы (рис. 10): $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, и $\overline{DB}$. Тогда $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$, $\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD} = \overline{AD} - \overline{DB}$, т.к. $\overline{CD} = \overline{DB}$. Но $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$, или $(\overline{AD} + \overline{DB}) \cdot (\overline{AD} - \overline{DB}) = 0$, или $\overline{AD}^2 = \overline{DB}^2$, или $|\overline{AD}|^2 = |\overline{DB}|^2$, или $|AD|^2 = |DB|^2$, т.е. AD = DB и AD = $\frac{1}{2}$BC.

СЕДЬМОЕ РЕШЕНИЕ (VIII кл.)

Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 11

Пусть AB = c, AC = b, BC = a. Запишем координаты вершин треугольника: A(O; O); B(O; c); C(b; O). Так как AD - медиана, то $(\frac{b}{2}; \frac{c}{2})$ - координаты точки D. Отсюда BC = $\sqrt{b^2 + c^2}$ и AD = $\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$, т.е. AD = $\frac{1}{2}$BC.

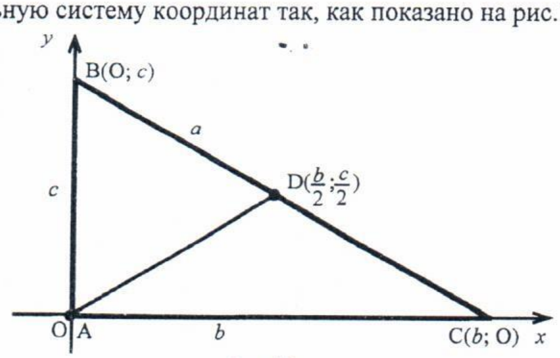

Рис. 11

16. Доказать теорему о средней линии трапеции (VIII кл.).

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ. Прежде докажем, что средняя линия трапеции содержит середины его диагоналей. Пусть в трапеции ABCD (BC || AD) средняя линия MN пересекается с диагональю AC в точке O. Докажем, что точка O - середина AC (рис. 12). Пусть серединой диагонали AC будет точка O_1. Тогда MO_1 - средняя линия треугольника ABC, поэтому MO_1 || BC; NO_1 - средняя линия треугольника ACD, поэтому NO_1 || AD. Так как BC || AD, то NO_1 || BC. Получили противоречие, что через точку O_1 проходят две прямые MO_1 и NO_1, параллельные BC. Следовательно, O_1 = O.

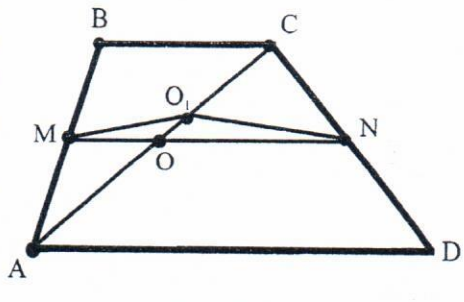

Рис. 12

Аналогично доказывается, что MN содержит и середину диагонали BD. Отсюда MN || BC, так как MN содержит среднюю линию треугольника ABC - отрезок MO; MN || AD, так как MN содержит среднюю линию треугольника ACD - отрезок ON.

Далее, $MN = MO + NO = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD = \frac{BC + AD}{2}$.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ. Введем систему прямоугольных координат так, как показано на рисунке 13 (ABCD - трапеция; BC || AD; MN - средняя линия). Отметим координаты вершин: $A(x_1; O)$; $B(O; y_1)$; $C(x_3; y_1)$ и $D(x_2; O)$. Определим координаты точек M и N:

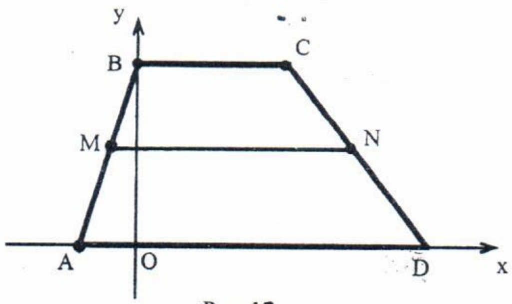

Рис. 13

$$M(\frac{x_1}{2}; \frac{y_1}{2}) \text{ и } N(\frac{x_2 + x_3}{2}; \frac{y_1}{2}).$$

Отсюда ординаты точек M и N равны $\frac{y_1}{2}$, т.е. прямая MN имеет уравнение $y = \frac{y_1}{2}$. Так как прямые $y = \frac{y_1}{2}$ и $y = 0$ параллельны, то MN || AD.

С другой стороны, $MN = \sqrt{(\frac{x_2 + x_3}{2} - \frac{x_1}{2})^2 + (\frac{y_1}{2} - \frac{y_1}{2})^2} = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2} = \frac{(x_2 - x_1) + x_3}{2} = \frac{BC + AD}{2}$, где $BC = x_2 - x_1$ и $AD = x_3$.

17. Если суммы квадратов противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то его диагонали перпендикулярны. Доказать.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью теоремы косинусов; IX кл.)

Пусть α - наименьший угол между диагоналями AC и BD выпуклого четырехугольника ABCD (рис. 14). Тогда $AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot OA \cdot \cos\alpha$, $CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos\alpha$,

$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos(180° - \alpha) = OB^2 + OC^2 + 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos\alpha$ и $AD^2 = OA^2 + OD^2 - 2 \cdot OA \cdot OD \cdot \cos(180° - \alpha) = OA^2 + OD^2 + 2 \cdot OA \cdot OD \cdot \cos\alpha$.

Так как по условию суммы квадратов противоположных сторон четырехугольника равны, то, учитывая приведенные равенства, получим: $-(OA \cdot OB + OC \cdot OD) \cdot \cos\alpha =$ $= (OB \cdot OC + OA \cdot OD) \cdot \cos\alpha$. Это равенство возможно только при $\alpha = 90°$ (если $0° < \alpha < 90°$, то левая часть равенства отрицательна, а правая - положительна). Следовательно, $AC \perp BD$.

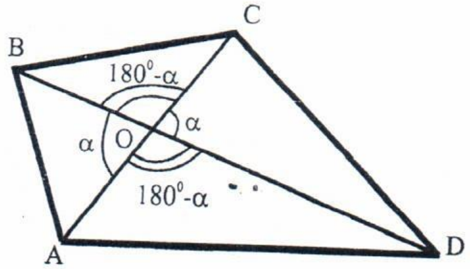

Рис. 14

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (методом от противного с использованием следствия из теоремы косинусов; IX кл.). Пусть в четырехугольнике ABCD (рис. 14) суммы квадратов противоположных сторон равны и углы AOB и COD - острые, а углы BOC и DOA - тупые. Тогда из треугольников AOB и COD имеем:

$$AB^2 < OB^2 + OA^2 \text{ и } CD^2 < OC^2 + OD^2.$$

Откуда

$$AB^2 + CD^2 < OB^2 + OA^2 + OC^2 + OD^2 \qquad (1)$$

Из треугольников BOC и DOA имеем:

$$BC^2 > OB^2 + OC^2 \text{ и } AD^2 > OA^2 + OD^2.$$

Откуда

$$OB^2 + OC^2 + OA^2 + OD^2 < BC^2 + AD^2 \qquad (2)$$

По неравенствам (1) и (2) имеем:

$AB^2 + CD^2 < BC^2 + AD^2$ - что противоречит условию!

Следовательно, $AC \perp BD$.

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ (координатно-векторный метод; VIII кл.). Поместим начало координат в вершину A выпуклого четырехугольника ABCD, а ось Ox направим вдоль стороны AD (рис. 15). Отметим координаты вершин:

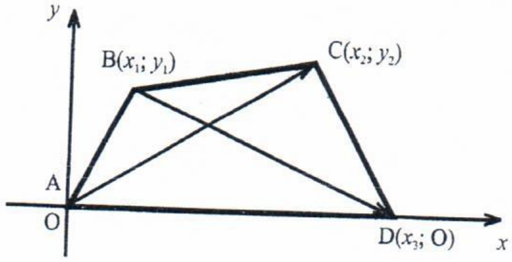

Рис. 15

$A(O;O)$, $B(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$ и $D(x_3;O)$. По условию: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Но $AB^2 = x_1^2 + y_1^2$, $CD^2 = (x_3 - x_2)^2 + y_2^2$, $BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ и $AD^2 = x_3^2$, поэтому $x_1^2 + y_1^2 + (x_3 - x_2)^2 + y_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + x_3^2$.

Откуда

$$x_1x_2 - x_2x_3 + y_1y_2 = 0 \qquad (*)$$

Рассмотрим векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$. Напишем их координаты и вычислим скалярное произведение: $\overline{AC} = (x_2;\ y_2)$, $\overline{BD} = (x_3 - x_1;\ y_1)$, $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = x_2 \cdot (x_3 - x_1) - y_1y_2 = -(x_1x_2 - x_2x_3 + y_1y_2) = 0$ (см. равенство (*)), откуда $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, т.е. $AC \perp BD$.

18. Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников середины сторон совпадают, то их площади равны.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (VIII-IX кл.)

Прежде докажем, что площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника (кстати, отметим, что это параллелограмм), равна половине площади исходного четырехугольника.

Пусть вершины четырехугольника MNPQ являются серединами сторон четырехугольника ABCD (рис. 16). Тогда для площадей из подобия треугольников MBN и ABC (т.к. $MN \parallel AC$) имеем: $\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}} = (\frac{BN}{BC})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, откуда $S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Точно так же

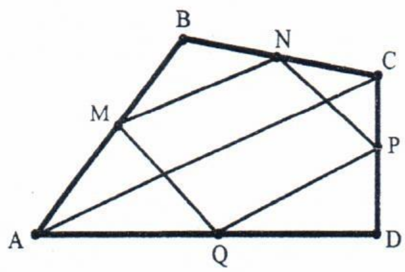

Рис. 16

$S_{PDA} = \frac{1}{4}S_{CDA}$. Отсюда $S_{MBN} + S_{PDA} = \frac{1}{4}(S_{ABC} + S_{CDA}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Аналогично, $S_{AMQ} + {} + S_{CNP} \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Таким образом, $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - (S_{MBN} + S_{PDA} + S_{AMQ} + S_{CNP}) = = S_{ABCD} - (\frac{1}{4}S_{ABCD} + \frac{1}{4}S_{ABCD}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Возьмем теперь четырехугольник MNPQ, вершины которого являются серединами сторон четырехугольников ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 17).

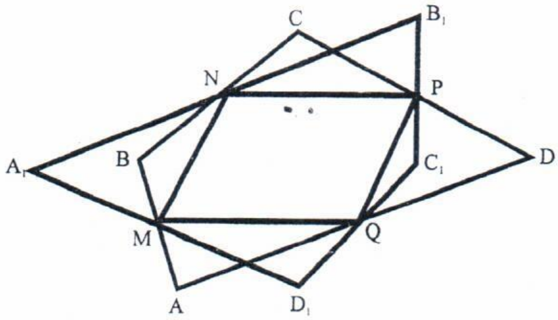

Рис. 17

Пусть S_1, S_2 и S - соответственно площади четырехугольников ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ и MNPQ. Тогда по доказанному: $S = \frac{S_1}{2}$ и $S = \frac{S_2}{2}$, т.е. $\frac{S_1}{2} = \frac{S_2}{2}$, откуда $S_1 = S_2$.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (VIII-IX кл.)

Пусть $NP = a$, $MN = b$ (рис. 17). Тогда по свойству средней линии треугольника имеем:

$$A_1C_1 = 2a,\ BD = 2a,\ \text{т.е. } BD = A_1C_1; \qquad (1)$$

$$A_1C_1 \parallel NP,\ BD \parallel NP,\ \text{т.е. } BD \parallel A_1C_1. \qquad (2)$$

Аналогично,

$$AC = B_1D_1 \quad \text{и} \qquad (3)$$

$$AC \parallel B_1D_1 \qquad (4)$$

Из равенств (2) и (4) заключаем, что углы между прямыми AC и BD, A_1C_1 и B_1D_1 равны. Обозначим эти углы через α. Так как площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними, то имеем (см. (1)-(4):

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 2a \cdot \sin\alpha = 2ab\sin\alpha \quad \text{и}$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 2a \cdot \sin\alpha = 2ab\sin\alpha,$$

откуда $\qquad S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1}$.

19. Дан треугольник ABC площади S. Через основание высоты BD проведен отрезок DM параллельно стороне AB (M - внутренняя точка стороны BC). Доказать, что для площади треугольника BDM справедливо неравенство:

$$S_{BDM} \le \frac{1}{4}S.$$

Когда достигается равенство?

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (VIII-IX кл.). Пусть $S_{BDM} = kS$. Докажем, что $k \le \frac{1}{4}$. Введем обозначения: $AD = x$, $CD = y$, $BD = h$, $ME = h_1$ (рис. 18). По условию имеем систему:

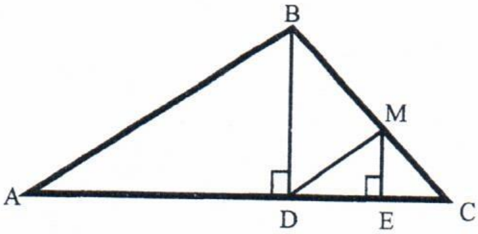

Рис. 18

$$\begin{cases} \frac{(x+y)\cdot h}{2} = S \\ \frac{xh}{2} + \frac{yh_1}{2} = S - kS = (1-k)S \\ \frac{h_1}{h} = \frac{y}{x+y} (\Delta DMC \backsim \Delta ABC) \end{cases}, \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} xh + yh = 2S, & (1) \\ xh + yh_1 = (2-2k)S, & (2) \\ h_1 = \frac{hy}{x+y} & (3) \end{cases}$$

Вычитая почленно равенства (1) и (2), получим:

$$yh - yh_1 = 2kS \qquad (4)$$

Поделив почленно равенства (1) и (4), имеем: $\frac{xh+yh}{yh - yh_1} = \frac{1}{k}$, или, учитывая (3), получим:

$$kx^2 + (2k-1)yx + ky^2 = 0 \qquad (5)$$

Рассмотрим уравнение (5) как квадратное относительно, например, переменной x. Переменная x существует тогда, когда дискриминант $D = y^2(1-4k) \ge 0 \iff 1 - 4k \ge 0$, откуда $k \le \frac{1}{4}$. При $k = \frac{1}{4}$ из равенства (5) имеем $(x - y)^2 = 0$. Откуда $x = y$, а, следовательно, равенство достигается для равнобедренного треугольника ABC (AB = CB).

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (VIII-IX кл.)

Проведем DN || BC (рис.19). Тогда DNBM - параллелограмм. Введем обозначения для площадей: $S_{ADN} = S_1$, $S_{CDN} = S_2$, $S_{DNBM} = S_0$. Из подобия треугольников ADN и ABC, CDM и ABC соответственно имеем: $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{AD}{AC}$ и $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{CD}{AC}$.

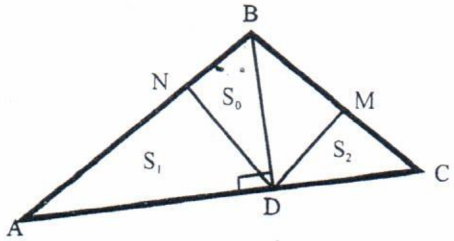

Рис. 19

Отсюда $\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{AD + CD}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$, т.е.

$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$ или $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = S$. Так как $2\sqrt{S_1 S_2} \le S_1 + S_2$, то из полученного равенства $2(S_1 + S_2) \ge S$, $S_1 + S_2 \ge \frac{S}{2}$. Но тогда $S_0 \le \frac{S}{2}$. Отсюда $S_{BDM} = \frac{1}{2} S_0 \le \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{2} = \frac{1}{4} S$. Равенство достигается при $S_1 = S_2$, т.е. при AD = CD (в случае равнобедренного треугольника ABC: AB = CB).

20. Биссектриса BD внутреннего угла треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные сторонам BC и BA треугольника. Докажите.

Одно решение этой задачи с помощью подобия прямоугольных треугольников приводится в учебнике геометрии (см. [2], с.152). Приведем еще четыре решения.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (методом подобия, VIII-IX кл.)

Проведем через точку C (рис.20) прямую m || BD. Тогда прямая m и полупрямая AB пересекаются и $\Delta ABD \sim \Delta AD_1C$. Отсюда $\frac{AD_1}{AB} = \frac{AC}{AD}$, или $\frac{AB + BC}{AB} = \frac{AD + DC}{AD}$, или $1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{DC}{AD}$, откуда $\frac{CB}{AB} = \frac{CD}{AD}$.

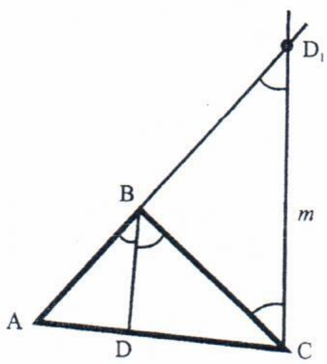

Рис. 20

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (методом площадей, VIII - IX кл.)

Имеем (рис. 21):

$$\frac{S_{CBD}}{S_{ABD}} = \frac{0{,}5 \cdot CB \cdot DB \cdot \sin\frac{B}{2}}{0{,}5 \cdot AB \cdot DB \cdot \sin\frac{B}{2}}.$$

С другой стороны, $\frac{S_{CBD}}{S_{ABD}} = \frac{0{,}5 \cdot CD \cdot h}{0{,}5 \cdot ADB \cdot h}$,

где h - высота треугольника, проведенная из вершины B. Из этих равенств получаем:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CD}{AD}.$$

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ (с помощью теоремы синусов, IX кл.)

По теореме синусов (см. рис. 21).

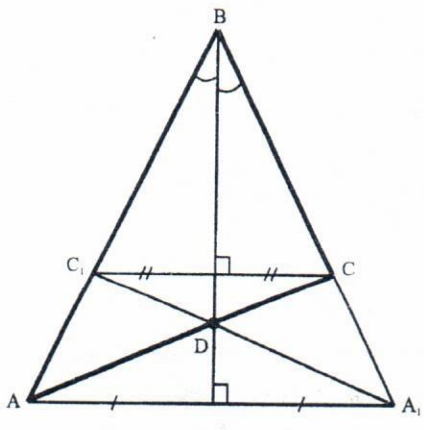

Рис. 21

$$\frac{\sin\frac{B}{2}}{CD} = \frac{\sin C}{BD} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\frac{B}{2}}{AD} = \frac{\sin A}{BD},$$

или

$$\frac{\sin\frac{B}{2}}{CD \cdot \sin C} = \frac{1}{BD} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\frac{B}{2}}{AD \cdot \sin A} = \frac{1}{BD},$$

Откуда $\frac{\sin\frac{B}{2}}{CD \cdot \sin C} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{AD \cdot \sin A}$, или $\frac{CD}{AD} = \frac{\sin A}{\sin C}$, или $\frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AB}$.

ЧЕТВЕРТОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью осевой симметрии и подобия, VIII - IX кл.)

Выполнив осевую симметрию треугольника ABC относительно прямой BD (рис. 21), получим:

$\Delta CDC_1 \backsim \Delta ADA_1$ и $\Delta CC_1B \backsim \Delta AA_1B$ (убедитесь в этом!). Отсюда:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CC_1}{AA_1} \text{ и } \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{CB}{AB} \text{ (учесть } AB = A_1B).$$

Следовательно, $\frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AB}$.

21. Какими равными правильными многоугольниками можно сплошь (без просветов) заполнить плоскость? (VIII - IX кл.)

РЕШЕНИЕ. Величина внутреннего угла правильного n - угольника равна $\frac{2d(n-2)}{n}$. Около каждой вершины n - угольника должно быть целое число таких углов, т.е. сумма всех «x» таких углов должна составлять $4d$.

Поэтому получаем:

$$x \cdot \frac{2d(n-2)}{n} = 4d, \text{ или}$$

$$nx - 2x - 2n = 0 \qquad (1)$$

Дадим 2 способа решения уравнения (1), где x и n - натуральные.

СПОСОБ 1. Из равенства (1) имеем:

$$x = \frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = \frac{2(n-2)}{n-2} + \frac{4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2} \text{ (т.к. } n \geq 3).$$

x - по условию - число целое, следовательно, $\frac{4}{n-2}$ должно быть целым, т.е. $n-2$ должен быть делителем 4, а именно: $n-2=1$, $n-2=2$ и $n-2=4$.

Откуда $n=3$, $n=4$ и $n=6$.

ОТВЕТ: Правильными треугольниками, квадратами или правильными шестиугольниками.

СПОСОБ 2. Разделив обе части равенства (1) на n, получим:

$$x - \frac{2x}{n} - 2 = 0, \quad x = \frac{2x}{n} + 2 \qquad (2)$$

Так как x должно быть натуральным числом, то $\frac{2x}{n}$ должно быть натуральным числом, т.е. $2x$ должно делиться на n. Положим $2x = nt$ (t - натуральное), тогда уравнение (2) перепишется следующим образом: $\frac{nt}{2} = t + 2$, или, умножив на $\frac{2}{t}$, имеем:

$$n = 2 + \frac{4}{t} \qquad (3)$$

Уравнение (3) показывает, что $\frac{4}{t}$ должно быть целым числом, следовательно, $t = 1; 2; 4$.

Если $t = 1$, то $n = 6$; если $t = 2$, то $n = 4$; если $t = 4$, то $n = 3$. Итак, имеем правильные треугольники, квадраты и правильные шестиугольники.

22. В дугу АВ вписана ломаная линия АМВ из двух отрезков АМ и МВ (АМ > МВ). Докажите, что основание перпендикуляра КН, опущенного из середины К дуги АВ на отрезок АМ, делит ломаную линию пополам:

АН = НМ + МВ.

Эта задача - историческая и связана с именем Архимеда. Редакция журнала «КВАНТ» поместила ее под юбилейным тысячным номером в «Задачнике «КВАНТА». В журнале «КВАНТ» приведены два решения этой задачи (см. [3], с.32).

Приведем еще одно элементарное решение (VIII - IX кл.). Выполним следующие построения. Достроив дугу АВ до окружности с центром О, проведем радиусы ОА, ОК, ОМ, ОВ и серединные перпендикуляры ОЕ и ОР соответственно к хордам АМ и МВ (рис.22): С и D - точки их пересечения с окружностью. Тогда ОК ⊥ АВ. Из условия задачи: АН – НМ = МВ. С другой стороны, АН + НМ = АМ. Из этих равенств:

$$AH = \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}MB, \text{ или}$$

$$AH = AE + MP \qquad (1)$$

Далее, $AH = AE + EH \qquad (2)$

Из равенств (1) и (2) имеем:

$$EH = MP \qquad (3)$$

Нам остается доказать равенство (3). ∠HKO = ∠MAB = ∠COK, как углы острые и с соответственно перпендикулярными сторонами. Но ∠MAB = $\frac{1}{2}$∪MB = ∪MD, ∠COK = ∪CK и поэтому ∪CK = = ∪MD. Отсюда равны и хорды CK и MD, а также и треугольники COK и MOD по трем сторонам. Проведя в треугольнике COK высоту KE_1 (KE_1 = EH), заключаем, что KE_1 = MP, т.е. EH = MP.

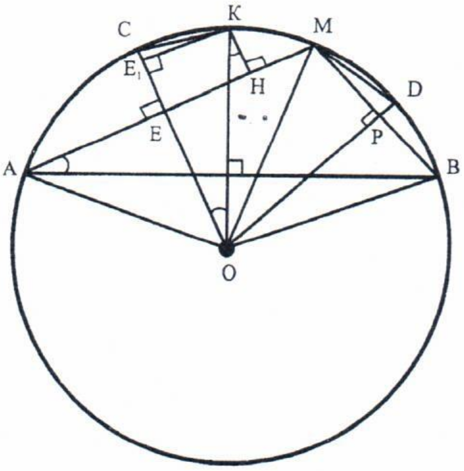

Рис. 22

23. Дадим простой вывод формулы Герона для площади треугольника (IX кл.).

Прежде выразим какую-либо высоту треугольника через его стороны. Для высоты h_C по следствию из теоремы косинусов легко получается формула (см. [2], с.162):

$$h_C = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$

Преобразуем эту формулу к легко запоминаемому виду. Так как подкоренное выражение можно привести к виду:

$$(b - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}) \cdot (b + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}) =$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4c^2} =$$

$$= \frac{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{4c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}$$

(где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$), то

$$h_C = \frac{2}{c^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Отсюда, учитывая равенство $S = \frac{1}{2} c h_C$, получим искомую формулу:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

24. Если a, b, c - стороны треугольника ABC и точка D делит сторону BC так, что $BD = a_1$, и $CD = a_2$, то

$$AD^2 = \frac{a_1 b^2 + a_2 c^2 - a a_1 a_2}{a} \text{ (теорема Стюарта)} \qquad (*)$$

В математической литературе эта задача решается с помощью теоремы косинусов. Мы приведем координатное решение (VIII кл.).

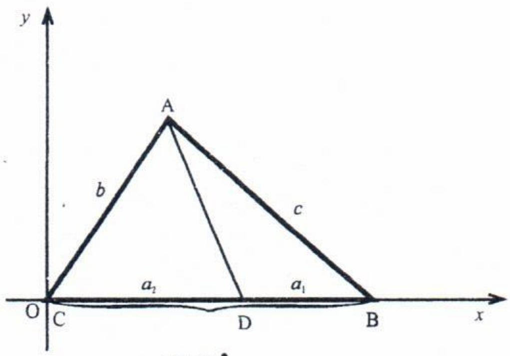

Рис. 23

Поместим начало координат в вершину C и направим ось x по стороне BC (рис. 23). Отметим координаты вершин: C(O; O), B(a; O) и A(x_1; y_1). Координаты точки D: D(a_2; O). Тогда $b^2 = x_1^2 + y_1^2$, $AD^2 = (a_2 - x_1)^2 + y_1^2 = a_2^2 - 2a_2x_1 + b^2$, $c^2 = (a - x_1)^2 + y_1^2 = a^2 - 2ax_1 + b^2$. Проверим равенство (*): $\frac{a_1 b^2 + a_2 c^2 - a a_1 a_2}{a}$

$$= \frac{a_1 b^2 + a_2(a^2 - 2ax_1 + b^2) - a a_1 a_2}{a} = \frac{ab^2 + a_2 a^2 - 2a_2 a x_1 - a a_1 a_2}{a} = b^2 +$$

$+ a_2(a_1 + a_2) - 2a_2x_1 - a_1a_2 = b^2 - 2a_2x_1 + a_2^2 = AD^2$ (в преобразованиях мы учли $a_1 + a_2 = a$).

25. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса r, наибольшую площадь имеет квадрат.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью производной, X кл.)

Пусть ABCD - искомый прямоугольник. Обозначим смежные стороны через x и y. Тогда по теореме Пифагора имеем: $x^2 + y^2 = 4r^2$, или $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$. Площадь S прямоугольника будет функцией от x и запишется так: $S(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$, где $0 < x^2 < 4r^2$, $0 < x < 2r$.

Для отыскания максимума функции $S(x)$ найдем ее производную и приравняем к нулю: $S'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} - \dfrac{2x \cdot x}{2\sqrt{4r^2 - x^2}}$, $S'(x) = \dfrac{(4r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0$, откуда $4r^2 - 2x^2 = 0$, $x = r\sqrt{2}$, причем $S(O) = S(2r) = 0$. Следовательно, при $x = r\sqrt{2}$ на отрезке [O; 2r] мы имеем maxS, т.е. максимальную площадь имеет квадрат: $x = y = r\sqrt{2}$.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (VIII - IX кл.)

Нами получена формула площади: $S = x\sqrt{4r^2 - x^2}$. Если S - наибольшее, то и $S^2 = x^2(4r^2 - x^2)$ - наибольшее. Но сумма множителей x^2 и $4r^2 - x^2$ постоянна и равна $4r^2$, следовательно, наибольшее значение это произведение достигает, если $x^2 = 4r^2 - x^2$ (см. задачу 3), т.е. при $x = r\sqrt{2}$. Но тогда и $y = r\sqrt{2}$. Значит, ABCD - квадрат.

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ (с помощью квадратного уравнения, VIII - IX кл.)

Нами получена формула площади: $S = x\sqrt{4r^2 - x^2}$, откуда имеем уравнение (квадратное относительно x^2):

$$x^4 - 4r^2x^2 + S^2 = 0.$$

Откуда

$$x^2 = \frac{4r^2 \pm \sqrt{16r^4 - 4S^2}}{2}.$$

Тогда

$$16r^4 - 4S^2 \geq 0, \quad S \leq 2r^2.$$

Наибольшее $S = 2r^2$ и достигается оно при $x^2 = 2r^2$, $x = r\sqrt{2}$. Тогда и $y = r\sqrt{2}$, т.е. когда ABCD - квадрат.

26. Существует ли треугольная пирамида, основание которой - прямоугольный треугольник, а плоские углы при вершине прямые?

ОТВЕТ: Такая пирамида невозможна.

Предположим, что пирамида, о которой идет речь в задаче, существует: SABC - пирамида, ΔABC - основание (AB = C, AC = b, ∠BAC = 90°, ∠ASB = ∠BSC = ∠CSA = 90°).

Приведем четыре решения, устанавливающие невозможность искомой пирамиды.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (координатно-векторный метод, X - XI кл.)

Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 24. Тогда вершины пирамиды имеют следующие координаты: A(O; O; O), B(O; -C; O), C(b; O; O), S(x; y; Z).

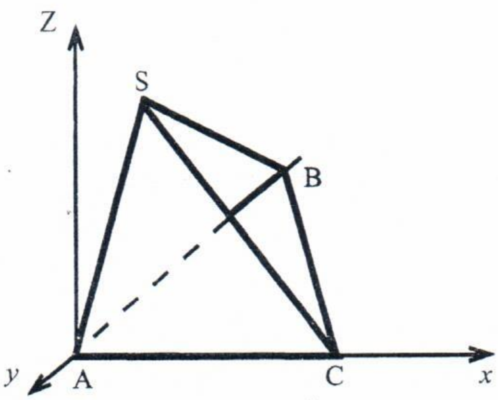

Рис. 24

Найдем координаты x, y, и Z. По условию имеем систему:

$$\begin{cases} \overline{SA}\cdot\overline{SC}=0, \\ \overline{SC}\cdot\overline{SB}=0, \\ \overline{SB}\cdot\overline{SA}=0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+Z^2-bx=0, \\ x^2+y^2+Z^2+cy-bx=0, \\ x^2+y^2+Z^2+cy=0, \end{cases} \quad \text{откуда } x=y=Z=0.$$

Следовательно, S = A, т.е. пирамида вырождается в треугольник ABC.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ (с помощью теоремы Пифагора, VIII - XI кл.)

Из треугольников ABS, ASC, BSC и ABC (рис. 24) имеем:

$$BC^2 = BS^2 + CS^2, \quad (1)$$

$$AB^2 = BS^2 + AS^2, \quad (2)$$

$$AC^2 = AS^2 + CS^2 \quad (3)$$

и

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (4)$$

Подставляя в равенство (4) соотношения из равенств (1)-(3), получим: $BS^2 + CS^2 = BS^2 + AS^2 + CS^2 + AS^2$, $2AS^2 = 0$, $AS = 0$. Отсюда $S = A$, т.е. пирамида SABC выродилась в треугольник ABC.

ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ (векторный метод, X - XI кл.)

Введем в рассмотрение векторный базис: ($\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$) (рис. 24). Тогда $\overline{AC} = \overline{SC} - \overline{SA}$, $\overline{AB} = \overline{SB} - \overline{SA}$ и $\overline{AC} \cdot \overline{AB} = 0$, или $(\overline{SC} - \overline{SA}) \cdot (\overline{SB} - \overline{SA}) = 0$, откуда $\overline{SA}^2 = 0$, $|\overline{SA}|^2 = 0$, $|\overline{SA}| = 0$, т.е. $S = A$ и пирамида SABC выродилась в треугольник ABC (здесь мы учли, что $\overline{SC} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SA} = \overline{SA} \cdot \overline{SB} = 0$).

ЧЕТВЕРТОЕ РЕШЕНИЕ (с применением теоремы о 3-х перпендикулярах, X - XI кл.)

Пусть все плоские углы при вершине S пирамиды SABC - прямые (рис. 24). Докажем, что ни один из углов треугольника ABC не может быть прямым. Так как $AS \perp CS$, $AS \perp BS$, то $AS \perp$ пл. (BSC). Проекцией отрезка AC на плоскость (BSC) является отрезок CS. Но $CS \not\perp BC$, $BC \subset$ пл. (BSC) (в треугольнике BSC не может быть двух прямых углов!). Тогда по теореме о 3-х перпендикулярах $AC \not\perp BC$ (т.е. $\angle C \neq 90°$). Аналогично $AC \not\perp AB$ и $AB \not\perp BC$.

Литература

1.Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 кл. ср. шк.-М.,1990

2.Погорелов А.В. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов.-10-е изд.-М.: Просвещение, 2009.-224с.: ил.

3.Ж.»Квант».-1986,№12

4.Сефибеков С.Р. Внеклассная работа по математике: Кн.для учителя.-М.,1988