Сефибеков Сефибек Рамазанович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

(*методическая разработка для учителя*)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В процессе изучения математики учащиеся «открывают» новые теоремы, формулируют самостоятельно, с помощью учителя или изучают по учебнику определения, аксиомы и т.д. При этом они должны научиться не просто воспроизводить знания в неизменном виде, а быстро и умело применять различные математические предложения, понятия как при изучении новых теоретических вопросов, так и при решении разнообразных задач. Поэтому в данной разработке рассмотрим в популярном изложении следующие вопросы: математические предложения, утверждения верные и неверные , необходимые и достаточные условия . Заметим, что прочное усвоение учащимися перечисленных вопросов имеет важное значение для овладения математическими знаниями .

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В математике важно

владеть ее утверждениями

и правильно рассуждать.

С. Р. Сефибеков

Математические предложения

Рассматриваемые в математике истины формируются в виде предложений. Главнейшими из них являются определения, теоремы и аксиомы.

Определением называют предложение, в котором разъясняется смысл нового понятия.

Теорема есть предложение, справедливость которого устанавливается путём некоторого рассуждения, называемого доказательством.

Аксиомой называют истину, принимаемую без доказательства.

Следствием называют непосредственный вывод из аксиомы или теоремы.

Леммой называют подготовительное предложение, вводимое для доказательства последующего.

Признаком называют показатель, примету, знак, по которым можно узнать, определить что-либо.

Следствие, лемма и признак — теоремы.

Гипотеза — научное предположение, выдвигаемое для объяснения каких-либо явлений; вообще — предположение, требующее подтверждения (доказательства истинности или ложности).

Приведём несколько примеров определений, аксиом и теорем.

Определения

- ✓ Целое число, кроме 1, которое делится только на 1 и само на себя, называют простым.
- ✓ Два угла называют вертикальными, если стороны одного угла являются продолжением сторон другого.
- ✓ Прямую, проходящую через две точки окружности, называют секущей этой окружности.

Аксиомы

- ✓ Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.
- ✓ Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Теоремы

- ✓ Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
- ✓ Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
- ✓ Любое движение является наложением.

Формулировка любой теоремы состоит из условия и заключения. Рассмотрим следующую теорему.

Теорема. Вертикальные углы равны.

Условие теоремы: углы вертикальные. Заключение теоремы: они равны.

Из того, что углы вертикальные, вытекает, что они равны, то есть из условия следует, выводится заключение.

При проверке теоремы, при её доказательстве условие считается данным, а заключение проверяется. В этом состоит цель доказательства справедливости или несправедливости теоремы. Связь условия и заключения наглядно можно представить так:

$\boxed{\text{Условие}} \rightarrow \boxed{\text{Заключение}}$

Задание. Сумма двух нечётных слагаемых является чётным числом. Отделите в этой теореме условие от заключения.

Решение

Переформулируем данную теорему по схеме «если..., то...». Получим: «Если сумма состоит из двух слагаемых, каждое из которых является нечётным числом, то сумма является чётным числом». Теперь видим, что условие — сумма состоит из двух слагаемых, каждое из которых является нечётным числом, а заключение — сумма — чётное число.

Замечание. Когда теорема сформулирована по схеме «если..., то...», условие легко отделяется от заключения. В более сложных случаях следует вначале переформулировать теорему по указанной схеме.

Доказательство теоремы состоит в том, что путём построения ряда умозаключений переходят от условия теоремы к её заключению. При этом опираются на ранее доказанные теоремы, на сформулированные ранее определения и аксиомы. Аксиомы возникли из опыта, и справедливость их, равно как и теорем, доказанных с их помощью, проверяется многократными наблюдениями и длительным опытом.

Утверждения верные и неверные. Задачи на доказательство

Приведём несколько верных и неверных утверждений. Верные докажем, а неверные опровергнем (то есть докажем, что они неверны).

1. Любого мальчика зовут Рамазан.

Данное утверждение неверно. Для доказательства достаточно указать одного мальчика, имя которого не Рамазан.

2. Не всякого мальчика зовут Рамазан.

Данное утверждение верно. Для доказательства достаточно указать одного мальчика с другим именем.

3. Если число делится на 2, то оно оканчивается нулём.

Данное утверждение неверно. Для доказательства достаточно указать число, которое делится на 2 и оканчивается не нулём, например, число 36.

4. Если произведение двух целых чисел делится на 6, то хотя бы один из множителей делится на 6.

Данное утверждение неверно. Например,

$$3 \cdot 4 = 12$$

делится на 6, но множители 3 и 4 не делятся на 6.

5. В классе 34 учащихся. Среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы.

Данное утверждение верно. Рассмотрим самый худший случай, когда фамилии 33 учащихся начинаются с разных 33 букв (в русском алфавите 33 буквы; включаем и буквы ы, ь, ъ). Тогда фамилия одного оставшегося учащегося начинается с одной из этих 33 букв.

6. Если в треугольнике сумма двух углов равна 80°, то он тупоугольный.

Данное утверждение верно. Действительно, поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то третий угол равен $180° - 80° = 100°$.

7. Высоты треугольника расположены внутри треугольника.

Докажем, что данное утверждение неверно. Например, в тупоугольном треугольнике две высоты расположены вне треугольника, а в прямоугольном треугольнике две высоты являются его катетами.

8. $0:0=0$, так как $0 \cdot 0 = 0$.

Докажем, что данное утверждение неверно. Пусть $0:0=x$. Тогда по определению деления существует единственное число x такое, что $x \cdot 0 = 0$. Но в этом равенстве x может быть любым числом! Поэтому нуль делить на нуль нельзя!

9. Уравнение

$$(x-1)\sqrt{x-2}=0$$

имеет корень $x=1$.

Данное утверждение неверно, поскольку $x=1$ не входит в ОДЗ уравнения.

Прямая и обратная теоремы

Определение 1. Теорему называют обратной данной теореме, если её условие и заключение являются соответственно заключением и условием данной теоремы.

Пример 1. Прямая теорема. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.

Обратная теорема. В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны.

Заметим, что в данном случае для второй теоремы первая теорема будет обратной, так как и прямая, и обратная теоремы верны. Но так бывает не всегда. Рассмотрим пример.

Пример 2. Прямая теорема. Диагонали прямоугольника равны.

Обратная теорема. Если в четырёхугольнике диагонали равны, то этот четырёхугольник — прямоугольник.

Обратная теорема неверна. Например, у равнобедренной трапеции диагонали равны.

Но для той же прямой теоремы обратной служит и такая теорема: Если в параллелограмме диагонали равны, то он — прямоугольник. Легко доказать, что эта теорема верна.

Как же получилось, что у одной и той же прямой теоремы оказались две обратные? В условии прямой теоремы речь идёт о прямоугольнике, а он является не только четырёхугольником, но и параллелограммом. В одной из обратных теорем (в первой) была использована лишь часть условия (четырёхугольник), а в другой — всё условие.

Из вышесказанного можно сделать вывод: из справедливости прямой теоремы ещё не следует справедливость обратной теоремы.

Определение 2. Теорему называют противоположной данной, если её условие и заключение являются отрицанием условия и заключения данной теоремы.

Пример 3. Данная теорема. Если целое число оканчивается одним нулём, то квадрат этого числа оканчивается двумя нулями.

Противоположная теорема. Если целое число не оканчивается одним нулём, то квадрат этого числа не оканчивается двумя нулями.

Пример 4. Рассмотрим теорему (будем называть её прямой) и, составив обратную и противоположную ей, а также противоположную обратной, получим следующие теоремы (*см.* [1], с. 9).

1) Если две стороны треугольника равны, то и углы, лежащие против этих сторон равны (*прямая теорема*).
2) Если два угла треугольника равны, то и стороны, лежащие против этих углов, равны (*обратная теорема*).
3) Если две стороны треугольника не равны, то и углы, лежащие против этих сторон, не равны (*теорема, противоположная прямой*).
4) Если два угла треугольника не равны, то и стороны, лежащие против этих сторон, не равны (*теорема, противоположная обратной*).

Убедимся, что теоремы 1 и 4 (прямая и противоположная обратной), и теоремы 2 и 3 (обратная и противоположная прямой) равносильны. Действительно,

$$\left.\begin{array}{r}1)\Rightarrow 4)\\ 4)\Rightarrow 1)\end{array}\right|\Rightarrow 1)\Leftrightarrow 4);$$

$$\left.\begin{array}{r}2)\Rightarrow 3)\\ 3)\Rightarrow 2)\end{array}\right|\Rightarrow 2)\Leftrightarrow 3).$$

Теперь проведём доказательство так, чтобы оно годилось не только для этих конкретных четырёх теорем 1)–4), но и для любых четырёх теорем указанного вида.

Введём обозначения: $П$ — прямая теорема, A — условие $П$, B — заключение $П$, O — обратная теорема, $ПП$ — теорема, противоположная прямой, $ПО$ — теорема, противоположная обратной.

Тогда теоремы 1) – 4) сформулируем так:

1) $П$: если есть A, то есть B.
2) O: если есть B, то есть A.
3) $ПП$: если нет A, то нет B.
4) $ПО$: если нет B, то нет A.

Пусть справедлива теорема 1) $П$ (если есть A, то есть B), тогда справедлива и последняя 4) $ПО$ (если нет B, то нет A), поскольку если бы было A, то по 1) $П$ было бы и B. Обратно, из справедливости 4) $ПО$ следует справедливость 1) $П$, поскольку если бы не было B, то по 4) $ПО$ не было бы и A.

Аналогично доказывается равносильность 2) O и 3) $ПП$.

Пример 5. Сформулируйте теоремы $П$, O, $ПП$ и $ПО$ для углов равнобедренного треугольника.

Решение

$П$: в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

O: если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

$ПП$: если треугольник не равнобедренный, то углы при основании не равны.

$ПО$: если в треугольнике два угла не равны, то он не равнобедренный.

Из изложенного следует, что нет необходимости доказывать все четыре теоремы $П$, O, $ПП$ и $ПО$ для того, чтобы убедиться в их справедливости. Достаточно, например, доказать прямую и обратную теоремы ($П$ и O) или прямую и противоположную прямой.

Заметим, что известный метод доказательства от противного есть не что иное, как сведение прямой теоремы ($П$) к доказательству теоремы, противоположной обратной ($ПО$). Можно доказать, что если прямая теорема верна, то пользуясь методом доказательства от противного, придём к противоречию, а если не верна, то противоречия не получим. Конечно, при этом предполагается, что при доказательстве используются лишь верные математические предложения и что наши умозаключения верны.

Необходимые и достаточные условия

В математике часто используют понятия «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно». Эти понятия не нашли своего отражения в школьных учебниках математики, но учащимся следует научиться правильно их употреблять.

Если A и B — некоторые условия, то предложение «Если есть A, то есть B» хорошо знакомо, поскольку именно в таком виде формулируются теоремы математики. Например, «если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм».

Такая структура математических предложений использует понятия «необходимый признак», «достаточный признак», «необходимый и достаточный признаки».

Рассмотрим эти понятия и дадим им определения.

Путь A и B — некоторые условия. Выражение «A есть достаточный признак B» означает, что из A следует B. При этом B называют необходимым признаком A. Иначе говоря, необходимым признаком A называют любое следствие B, которое может быть получено из A.

Достаточным признаком B называют любое условие A, из которого следует B.

Утверждение «из A следует B» равносильно утверждению «если есть A, то есть и B», и можно записать: $A \Rightarrow B$. Эта запись означает: A — достаточный признак B, B — необходимый признак A.

Если утверждение $A \Rightarrow B$ назвать прямой теоремой, то утверждение $B \Rightarrow A$ — обратная теорема.

Таким образом, оба признака — и необходимый, и достаточный — являются теоремами, причём, если один из них назвать прямой теоремой, то другой признак является обратной теоремой. Значит, понятия необходимого и достаточного признаков полностью совпадают с понятиями прямой и обратной теорем.

Если $A \Rightarrow B$ верно, а $B \Rightarrow A$ неверно, то говорят, что B является необходимым, но не достаточным признаком A. При этом A является достаточным, но не необходимым признаком B.

Пример 1. Если два угла вертикальные, то они равны.

A — два угла вертикальные, B — вертикальные углы равны.

Проверим утверждения $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

$A \Rightarrow B$ верно, а $B \Rightarrow A$ — неверно (не всякие два равных угла являются вертикальными, например, углы при основании равнобедренного треугольника).

Итак, $A \Rightarrow B$ верно, то есть B — необходимый признак для A, A — достаточный признак для B.

Таким образом:

- ✓ чтобы два угла были вертикальными, необходимо, чтобы они были равны;
- ✓ чтобы два угла были равны, достаточно, чтобы они были вертикальными.

Итак, получаем, что равенство двух углов есть необходимый признак вертикальности этих углов, а вертикальность углов есть достаточный признак их равенства.

Если прямая и обратная теоремы верны, то есть выполняются оба утверждения $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то B является необходимым и достаточным признаком A. В этом случае A также является необходимым и достаточным признаком B. Тогда утверждения $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ можно записать так: $A \Leftrightarrow B$.

Фраза «B является необходимым и достаточным признаком A» кратко выражает тот факт, что верны обе теоремы: и прямая, и обратная. Тогда, чтобы утверждать, что B является необходимым и достаточным признаком A, нужно доказать две теоремы — прямую и обратную:

1) $A \Rightarrow B$ (из A следует B) — необходимость признака;
2) $B \Rightarrow A$ (из B следует A) — достаточность признака.

Иногда в математической литературе в формулировках теорем выражение «необходимо и достаточно» заменяется одним из следующих равнозначных ему, то есть имеющих тот же смысл выражений «тогда и только тогда», «все те, и только те», «в том, и только в том случае».

Пример 2. Для того, чтобы число делилось на 7, достаточно, чтобы оно делилось на 14. Почему слово «необходимо» здесь по смыслу не подходит?

Для того чтобы число делилось на 7, вовсе не необходимо, чтобы оно делилось на 14. Число может не делиться на 14 и всё же делиться на 7 (например, 21).

Данное предложение можно переформулировать по схеме «если..., то...» следующим образом: Если число делится на 14, то оно делится на 7.

Пример 3. Для того чтобы число делилось на 14, необходимо, чтобы оно делилось на 7. Почему слово «достаточно» здесь по смыслу не подходит?

Для того чтобы число делилось на 14, вовсе не достаточно, чтобы оно делилось на 7. Например, 21 делится на 7, но не делится на 14.

Данное предложение можно переформулировать так: если число делится на 14, то оно делится на 7.

Пример 4. Для того чтобы число делилось на 14, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 7. Почему здесь по смыслу подходят оба слова «необходимо» и «достаточно»?

Данное предложение можно выразить следующими двумя предложениями.

1) Если число делится на 14, то оно делится на 2 и на 7.
2) Если число делится на 2 и на 7, то оно делится на 14.

Предложение 1) выражает необходимость делимости на 2 и на 7 для того, чтобы число делилось на 14, а предложение 2) — достаточность делимости на 2 и на 7 для того, чтобы число делилось на 14. Предложение 2) обратно предложению 1).

Упражнения

1. Какие из приведённых ниже предложений являются определениями?

1) Две прямые на плоскости называют параллельными, если они не пересекаются.
2) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.
3) Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют хордой.
4) Часть плоскости, ограниченной окружностью, называют кругом.
5) Сумма углов выпуклого n-угольника равна
$$180^\circ(n-2).$$

2. Верны или нет следующие утверждения?

1) Если число оканчивается двумя нулями, то оно делится на 4.
2) Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3.
3) Если ни одно из двух слагаемых не делится на 5, то и их сумма не делится на 5.
4) Если уменьшаемое и вычитаемое не делятся на 10, то и разность не делится на 10.
5) Если одно из слагаемых не делится на 9, а все остальные слагаемые делятся на 9, то сумма не делится на 9.
6) Высота треугольника всегда меньше стороны, к которой она проведена.
7) Если треугольники равны, то их углы соответственно равны.
8) Если треугольники равны, то их стороны равны.

3. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Сформулируйте для данной теоремы обратную, противоположную обратной и противоположную прямой (O, $ПО$ и $ПП$).

4. Замените в утверждениях многоточия словами «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» так, чтобы получить справедливые утверждения.

1) Для того чтобы число делилось на 2, ..., чтобы оно делилось на 4.
2) Для того чтобы четырёхугольник был ромбом, ..., чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.
3) Для того чтобы треугольник был тупоугольным, ..., чтобы два его угла были острыми.
4) Для того чтобы треугольники были равновеликими, ..., чтобы их основания и высоты были попарно равны.
5) Для того чтобы четырёхугольник был прямоугольником, ..., чтобы все его углы были равны.
6) Для того чтобы многочлен $f(x)$ делился на двучлен $x-\alpha$, ..., чтобы число α было корнем этого многочлена.

Литература

1. *Шахно К. У.* Как готовиться к приёмным экзаменам в вуз по математике. — 8-е изд., стереотип. — Минск : Вышэйшая школа, 1971. — 390 с. : ил.
2. *Зайцев В. В.* и др. Элементарная математика. Повторительный курс. — М., 1974.
3. *Березанская Е. С., Колмогоров Н. А., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С.* Сборник задач и вопросов по геометрии. Пособие для учителей. — 2-е изд., перераб. — М. : Учпедгиз, 1962.
4. *Сефибеков С. Р.* Психолого-педагогические условия развития математического образования школьников в инновационной школьной среде : монография. — Н. Новгород : НИУ РАНХ и ГС, 2014. — 172 с.
5. *Геометрия.* 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2014. — 383 с. : ил.
6. *Геометрия.* 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов. — 10-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 224 с. : ил.