

Дисциплина: ПМ.02 Осуществление интеграции программных модулей

МДК.02.03 Математическое моделирование

Преподаватель: Лямина Ольга Сергеевна

ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

Тема занятия: *Графический способ решения задач линейного программирования*

Цели занятия:

- формировать целостное представление о графическом способе решения задач линейного программирования
- развивать умения по осуществлению поиска и использованию информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач на оптимизацию
- развивать навыки коммуникационного взаимодействия, умение выстраивать логические связи, презентационные умения;
- воспитывать чувство ответственности за порученное дело, чувство коллективизма

Тип занятия: усвоение новых знаний

Форма организации деятельности студентов: фронтальная, групповая.

Методы:

- *организации и осуществления учебных действий:* лекция с использованием слайд-презентации, беседа с постановкой проблемных вопросов, демонстрация процесса решения задач; решение практических задач профессиональной направленности
- *методы организации деятельности и формирования опыта:* погружение в профессиональную среду, работа с опорными конспектами, самоконтроль, работа в микрогруппах;
- *методы стимулирования и мотивации деятельности:* соревнование, установление связи учебного материала с прежним опытом студента и с будущим видом профессиональной деятельности, создание ситуации успеха
- *методы контроля:* экспресс-опрос, экспертное заключение.

Использованные педагогические технологии: технология обучения в математике на основе решения задач, деятельностный подход в обучении

Методическое обеспечение занятия: опорные конспекты, слайд-презентация, лист экспертной оценки, методические рекомендации по выполнению практического задания

Техническое, информационное и материальное обеспечение занятия: компьютер, мультимедиапроектор, экран, угольник, линейка.

Тема: Графический способ решения задач линейного программирования

Вид занятия: изучение нового материала

Курс 3, специальность: 09.02.07 Информационные системы и программирование

Время 85 минут

№ п/п	Этапы занятия	Время, мин.	Задачи, решаемые на этапе	Содержание этапа	Формы, методы и средства обучения	Предполагаемый результат
1	2	3	4	5	6	7
1	Организационный момент	2 мин	Создать благоприятные условия для взаимодействия преподавателя и студентов	Приветствие	Фронтальная, Живое слово преподавателя,	Положительный эмоциональный фон Готовность студентов к работе
2	Актуализация знаний, постановка проблемы	4 мин	Анализ представлений студентов об изученных ранее темах дисциплины Мотивирование студентов к изучению темы	Формулирование темы и цели учебного занятия. Постановка проблемных вопросов, помощь студентам при ответах	Фронтальная, Живое слово преподавателя	Познавательный интерес к теме

3	Изложение нового материала	21 мин	Формирование знаний о графическом способе решения задач линейного программирования	Демонстрация опорных конспектов. Изложение нового материала в форме беседы с демонстрацией слайдов Демонстрация алгоритма решения задачи на оптимизацию	Фронтальная, Живое слово преподавателя Средства наглядности: (слайды 2-10)	Познавательный интерес к теме Усвоение информации
4	Практическая работа	25	Закрепление пройденного материала	Организация работы студентов, формулирование задания, консультирование студентов.	Живое слово преподавателя Опорные конспекты, методические рекомендации по выполнению практического задания (слайды 11,12)	Активность студентов Переложение теоретических знаний в практические умения
4	Практическая работа	12	Индивидуальное решение практических задач, обсуждение в микрогруппах и принятие решения об оптимальном варианте решения задач.	Организация работы студентов в микрогруппах: формулирование задания, консультирование студентов.	Групповая Живое слово преподавателя Опорные конспекты, методические рекомендации по выполнению практического задания	Активность студентов Позитивные межличностные отношения в команде Проявление творческих и аналитических способностей Переложение теоретических знаний в практические умения

5	Презентация выполненной работы, экспертиза работы, подведение итогов	16	Трансляция результатов работы студентами Оценивание результатов работы преподавателем и студентами Подведение итогов работы, выявление типичных ошибок	Демонстрация и обоснование оптимального решения практической задачи Ответы на вопросы студентов и преподавателя Оценка деятельности работы студентов преподавателем Оценка результатов практической работы	Фронтально-групповая Живое слово преподавателя	Активность студентов Формирование представлений о способах решений задач по оптимизации Осознание результатов своей работы
8	Подведение итогов занятия, задание на дом	5	Обобщение знаний, полученных на занятии	Повторение ключевых положений пройденной темы. Расстановка акцентов	Фронтальная Средства наглядности (слайд 13)	Усвоение и закрепление знаний

Ход урока

1. Организационный момент.

- приветствие;
- проверка посещаемости;

2. Актуализация знаний.

- вводное слово;
- ознакомление с целью и задачами урока;
- актуализация темы;
- повторение опорных знаний, необходимых для изучения нового материала.

(Вопросы для повторения - приложение 1).

3. Изложение нового материала.

- разбор задачи;
- ознакомление с алгоритмом решения задач линейного программирования графическим методом;
- исследование области допустимых решений задачи линейного программирования.

(Опорные конспекты и справочный материал для изучения нового материала - приложение 2).

4. Практическая работа

(Методические рекомендации к практической работе - приложение 3).

5. Практическая работа в группах.

(Методические рекомендации к практической работе - приложение 4).

6. Презентация выполненной практической работы с проверкой. Подведение итогов практической работы.

7. Подведение итогов занятия. Домашнее задание.

Вопросы для повторения

- Что такое линейное программирование?

Ответ: Линейное программирование – наука о методах исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

- Что такое математическая модель задачи?

Ответ: Математическая модель задачи - это компактная запись её условия на языке математики с помощью математических символов, цифр, скобок, знаков действий, знаков сравнения уравнений, функций и других математических выражений.

- Как построить прямую, заданную уравнением?

Ответ: Необходимо найти 2 точки прямой (так как через любые 2 точки можно провести прямую и притом только одну). Или найти одну точку лежащую на оси y и одну точку на оси x и провести прямую через них.

Опорный конспект

Тема занятия: **Графический способ решения задач линейного программирования.**

Пример решения задачи

Задача. Имеются 2 проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас и полезная площадь дома каждого проекта приведены в таблице. Определите, сколько домов первого и второго проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

Стройматериалы	Расход стройматериалов (м ³) на один дом		Запас стройматериалов
	1	2	
Кирпич силикатный	12	4	3000
Кирпич красный	4	4	1200
Пиломатериалы	3	12	2520
Полезная площадь, м ²	30	40	

Решение:

1. Составляем математическую модель задачи

1.1. Вводим управляющие переменные: x – количество домов 1-го проекта, y – количество домов 2 проекта.

1.2. Составляем систему ограничений:

$$\begin{cases} 12x + 4y \leq 3000 & (1) \\ 4x + 4y \leq 1200 & (2) \\ 3x + 12y \leq 2520 & (3) \end{cases}$$

1.3. Строим целевую функцию: $F = 30x + 40y \rightarrow \max$.

2. Строим ОДР (область допустимых решений) системы ограничений.

Рассмотрим неравенство 1 системы ограничений.

$$12x + 4y \leq 3000$$

• Построим прямую.

Заменим знак неравенства на знак равенства.

$$12y + 4x = 3000$$

при $x=0, y=250$

при $y=0, x=750$.

Отметим полученные точки на оси x и y , проведем прямую.

- Какие точки нас интересуют?

$$12x + 4y \leq 3000$$

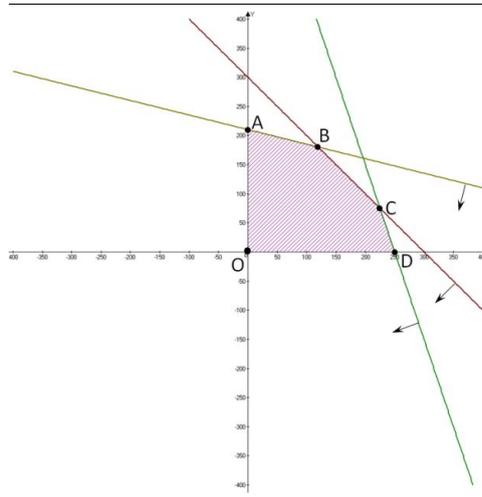
$$4y \leq -12x + 3000$$

$$y \leq -3x + 750$$

Знак неравенства меньше или равно нуля, следовательно, нас интересуют точки лежащие ниже построенной нами прямой.

(Решение неравенств показываем стрелкой).

Аналогично рассматриваем все остальные ограничения.



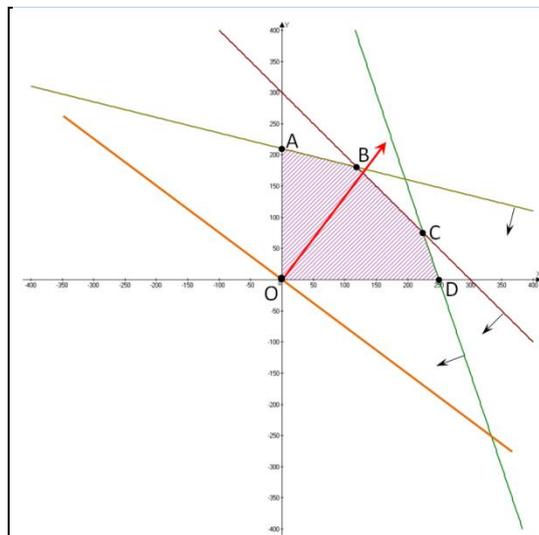
ОДР - OABCD – многоугольник,

где O (0, 0), A(210, 0), B(120, 180), C(225, 75), D(250,0).

3. Обратимся к целевой функции. Ее градиент есть вектор $C(30; 40)$ ((30;40) –коэффициенты при x и y целевой функции). Для решения задачи следует изобразить этот вектор в виде стрелки с началом в точке (0; 0) и концом в точке (30; 40) и линию целевой функции. Эта линия перпендикулярна вектору C и называется *линией уровня* L_0 .

Если стрелка является короткой и плохо различимой на чертеже, то обе координаты точки можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, при этом изменится лишь длина стрелки, но не ее направление. Поэтому на результате решения задачи это не скажется.

Удлиним стрелку до границы нашего рисунка. Все линии уровня целевой функции параллельны друг другу и перпендикулярны градиенту. Разумеется, такие линии могут быть построены для любых значений целевой функции, они параллельны и все вместе покрывают координатную плоскость. Градиент показывает направление роста целевой функции. Мы решаем задачу на максимум. Чем больше значение целевой функции, тем лучше. Однако при слишком больших значениях пунктирная линия уровня окажется за пределами области допустимых планов.



4. В своем крайнем положении линия уровня проходит через точку В. Таким образом, точка В является оптимальным планом задачи. Это единственная точка, принадлежащая одновременно области допустимых планов и линии уровня в ее крайнем положении. Следовательно, наша задача обладает единственным оптимальным планом.

5. Найдем координаты оптимального плана. Приближенно их можно определить по чертежу. Для точного расчета необходимо решить соответствующую систему уравнений. Точка В лежит на границе второго и третьего ограничений. Составляем систему уравнений

Определим координаты этой точки решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 12x + 4y = 3000 \\ 3x + 12y = 2520 \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем компоненты оптимального плана: В (120; 180), т.е. $x_1=120$, $x_2=180$. Найдем значение целевой функции в этой точке:

$$F(x) = 30 \cdot 120 + 40 \cdot 180 = 10800 \text{ –наибольшая полезная площадь при заданных условиях.}$$

Рассмотрим, для полноты картины, задачу, когда при той же системе ограничений и той же целевой функции требуется найти не максимальное, а минимальное ее значение. В этой ситуации все рассуждения, связанные с построением области допустимых планов и градиента полностью сохраняются. Однако для нахождения оптимального плана следует теперь сместить линию уровня до крайнего положения в направлении, противоположном градиенту. Оптимальным планом для задачи на минимум окажется точка О - начало координат. Оптимум будет равен 0.

Алгоритм решения задач графическим методом.

1. Составить математическую модель задачи.
(Изучить условие задачи, выбрать неизвестные, составить целевую функцию, записать систему ограничений).
2. Найти область допустимых решений (ОДР) системы ограничений задачи.
3. Построить вектор $C (c_1, c_2)$, который указывает направление целевой функции;

4. Провести линию уровня L_0 , которая перпендикулярна C (или построить прямую целевой функции, проходящую через начало координат)
5. Линию уровня (или прямую целевой функции) перемещаем по направлению вектора C для задач на максимум и в направлении противоположном C , для задач на минимум до выхода из ОДР.

Возможные случаи ОДР:



если область допустимых планов непустая и ограниченная, т.е замкнутое множество, то для каждой из задач — на максимум целевой функции или на минимум целевой функции, существует оптимальный план.



Если область неограничена, в этом случае одна из задач (на максимум или на минимум целевой функции) или обе эти задачи могут оказаться неразрешимыми.

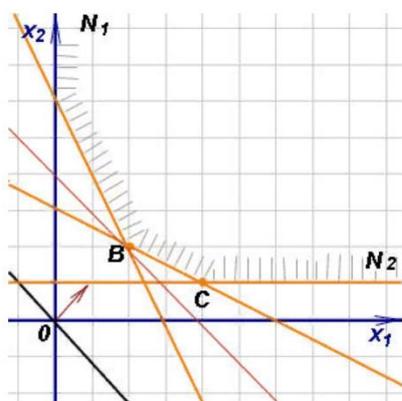


Пример 1. Решить графическим методом задачу линейного программирования, в которой требуется найти максимум и минимум функции $F = 5x_1 + 6x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 12 & (2) \\ 4x_1 \geq 4 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение. Многогранником решений является открытая область N_1BCN_2

Проведём линию уровня и определим минимальное и максимальные значения целевой функции. Для этого будем двигать линию уровня в направлении вектора C до пересечения с областью допустимых решений.



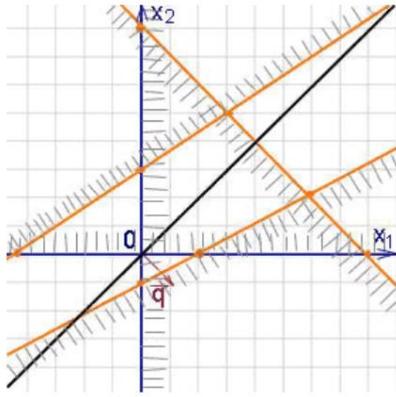
Из рисунка видно, что прямая ближайшее от начала координат опорное положение займёт в точке B . Следовательно, в этой точке функция цели имеет минимум. Координаты точки B : $(2, 2)$. Подставляя в функцию цели $x_1 = 2$ и $x_2 = 2$, получим минимальное значение функции: $F_{\min} = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 22$.

Легко заметить, что функция F неограниченно возрастает при заданной системе ограничений, поэтому можно условно записать, что $F_{\max} = \infty$

Пример 2. Решить графическим методом задачу линейного программирования, в которой требуется найти максимум функции $F = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение. Изображённая на рисунке ниже область не содержит ни одной общей точки, которая бы удовлетворяла всем неравенствам системы ограничений. То есть система ограничений противоречива и не может содержать ни одного решения, в том числе и оптимального.



**Методические рекомендации к выполнению
практического задания**

Тема занятия: **Графический способ решения задач линейного программирования.**

Цель работы: **Решить задачу линейного программирования** (найти оптимальное решение при заданных условиях).

🕒 Резерв времени:

на выполнение практического задания – 12 минут

на представление результатов работы – 4 минуты

Задача для группы 1.

На предприятии выпускается два вида изделий, при этом используется три вида сырья. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль. Исходные данные приведены в таблице:

Тип сырья	Норма затрат ресурсов на единицу продукции		Запасы сырья
	№1	№2	
1	18	15	360
2	6	4	192
3	5	3	180
Цена изделия	9	10	-

Задания

1. Ознакомиться с условием задачи.

2. Составить математическую модель задачи:

- целевую функцию;
- систему ограничений.

3. Изобразить область допустимых решений (ОДР) задачи.

4. Найти решение задачи и рассчитать значение целевой функции.

- если решением задачи является точка пересечения двух прямых, найти координаты этой точки, решая систему уравнений, составленную из уравнений этих прямых.

5. Презентация задачи.

- представить целевую функцию и систему ограничений, вид области допустимых решений (многоугольник, открытое множество и т.д), решение.

P.S. При необходимости использовать опорные конспекты и справочный материал.

Методические рекомендации к выполнению

практического задания

Тема занятия: **Графический способ решения задач линейного программирования.**

Цель работы: **Решить задачу линейного программирования** (найти оптимальное решение при заданных условиях).

⌚ Резерв времени:

на выполнение практического задания – 12 минут

на представление результатов работы – 4 минуты

Задача для группы 2

При производстве двух видов продукции используется 4 типа ресурсов. Норма затрат ресурсов на изготовление единицы продукции, общий объем каждого ресурса заданы в таблице.

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	20
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы продукции 1-го вида составляет 2 д.е, 2-го вида – 3 д.е. Найдите количество продукции 1-го и 2-го вида, при котором прибыль от реализации будет максимальной.

Задания

1. Ознакомиться с условием задачи.

2. Составить математическую модель задачи:

- целевую функцию;
- систему ограничений.

3. Изобразить область допустимых решений (ОДР) задачи.

4. Найти решение задачи и рассчитать значение целевой функции.

- если решением задачи является точка пересечения двух прямых, найти координаты этой точки, решая систему уравнений, составленную из уравнений этих прямых.

5. Презентация задачи .

- представить целевую функция и систему ограничений, вид области допустимых решений (многоугольник, открытое множество и т.д), решение.

P.S. При необходимости использовать опорные конспекты и справочный материал.

**Методические рекомендации к выполнению
практического задания**

Тема занятия: **Графический способ решения задач линейного программирования.**

Цель работы: **Решить задачу линейного программирования (найти оптимальное решение при заданных условиях).**

⌚ Резерв времени:

на выполнение практического задания – 12 минут

на представление результатов работы – 4 минуты

Задача для группы 3

Для производства двух видов сэндвич – панелей А и В фирма использует 3 вида сырья. Норма затрат ресурсов на изготовление единицы продукции, общий объем каждого ресурса заданы в таблице:

Вид сырья	Норма расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, в тоннах
	<i>A</i>	<i>B</i>	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.	30	40	

Составить такой план выпуска изделий, при котором прибыль предприятия от реализации будет максимальной.

Задания

1. Ознакомиться с условием задачи.

2. Составить математическую модель задачи:

- целевую функцию;
- систему ограничений.

3. Изобразить область допустимых решений (ОДР) задачи.

4. Найти решение задачи и рассчитать значение целевой функции.

- если решением задачи является точка пересечения двух прямых, найти координаты этой точки, решая систему уравнений, составленную из уравнений этих прямых.

5. Презентация задачи.

- представить целевую функцию и систему ограничений, вид области допустимых решений (многоугольник, открытое множество и т.д.), решение.

P.S. При необходимости использовать опорные конспекты и справочный материал.

**Методические рекомендации к выполнению
практического задания**

Тема занятия: **Графический способ решения задач линейного программирования.**

Цель работы: **Решить задачу линейного программирования** (найти оптимальное решение при заданных условиях).

⌚ Резерв времени:

на выполнение практического задания – 12 минут

на представление результатов работы – 4 минуты

Задача для группы 4

Для изготовления шкафов и буфетов мебельная фабрика применяет древесину 4-ех видов, запасы которой ограничены и составляют соответственно 12, 16, 12 и 8 м³. Количество древесины для изготовления 1 шкафа и 1 буфета, запасы и доход от реализации каждого вида продукции даны в таблице.

Ресурсы	Запасы	Расход	
		1 шкаф	1 буфет
1	12	-	0.4
2	20	0.4	-
3	12	0.2	0.2
4	8	0.1	0.2
Доход		2	3

Требуется составить такой план выпуска продукции, который обеспечивает наибольший доход, если от реализации шкафов получено 2 д. ед. дохода, а буфетов – 3 д. ед. дохода.

Задания

1. Ознакомиться с условием задачи.

2. Составить математическую модель задачи:

- целевую функцию;
- систему ограничений.

3. Изобразить область допустимых решений (ОДР) задачи.

4. Найти решение задачи и рассчитать значение целевой функции.

- если решением задачи является точка пересечения двух прямых, найти координаты этой точки, решая систему уравнений, составленную из уравнений этих прямых.

5. Презентация задачи .

- представить целевую функцию и систему ограничений, вид области допустимых решений (многоугольник, открытое множество и т.д), решение.

P.S. При необходимости использовать опорные конспекты и справочный материал.

Оценивание практической работы

Ф.И.О.	Оценка

Оценка «2» – не принимал участия в обсуждении решения задачи, материалом не владеет.

Оценка «3» – мало принимал участие в обсуждении задачи, не достаточно усвоил материал занятия;

Оценка «4» - принимал участие в обсуждении, материал занятия знает, но не в полном объёме;

Оценка «5» – активно принимал участие в обсуждении, отлично владеет знаниями по материалу занятия.

Домашнее задание

Финансовый консультант фирмы «АВС» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю. Клиент хочет вложить средства (не более 25 000 долл.) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси».

Анализируются акции «Дикси - Е» и «Дикси - В». Цены на акции: «Дикси - Е» — 5 долл. за акцию; «Дикси - В» — 3 долл. за акцию. Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук. По оценкам «АВС», прибыль от инвестиций в эти акции в следующем году составит: «Дикси - Е» — 1,1 долл.; «Дикси - В» — 0,9 долл.